MATEMATYKA ROZSZERZAJĄCA

MXMVD21P0T01

TEST DYDAKTYCZNY

Maksymalna ilość punktów: 50
Próg zaliczenia: 33%

1 Podstawowe informacje dotyczące zadań

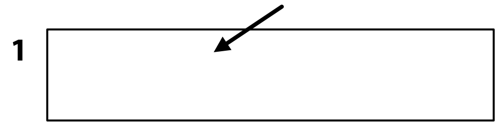
- **Test dydaktyczny** zawiera **22 zadań**.
- **Czas pracy** oznaczono w **kartach odpowiedzi**.
- **W czasie pracy można korzystać tylko z:** przyborów do pisania i rysowania, „Tablic matematyczno-fyzyczno-chemicznych" i prostego kalkulatora bez karty graficznej, nieposiadającego funkcji rozwiązywania równań i przekształcania wyrażeń algebraicznych. Nie można używać kalkulatora programowalnego.
- Obok każdego zadania umieszczono maks. ilość punktów.
- Odpowiedzi wpisuj do karty odpowiedzi.
- **Niejednoznaczny lub nieczytelny zapis zostanie uznany za błędny.**
- Notować można w arkuszu zadań, notatki nie zostaną ocenione.
- Pierwszą część testu dydaktycznego (zadania 1–11) tworzą **zadania otwarte**.
- W drugiej części testu dydaktycznego (zadania 12–22) zawarte są zadania zamknięte z wyborem odpowiedzi. We wszystkich zadaniach /lub ich częściach/ **tylko jedna odpowiedź jest poprawna**.
- Za brak rozwiązania lub nieprawidłowe rozwiązanie całego zadania **nie przydziela się punktów ujemnych**.

2 Zasady poprawnego zapisu odpowiedzi

- Pisz długopisem z **niebieskim lub czarnym wkładem**. Pisz **wyraźnie, czytelnie, uważaj, by długopis nie przerywał**.
- O ile będziesz rysować zwykłym ołówkiem, pogrub wszystko długopisem.
- Oceniane zostaną **tylko odpowiedzi umieszczone w karcie odpowiedzi**.

2.1 Wskazówki do zadań otwartych

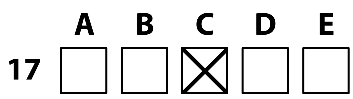
- Wyniki **wpisuj czytelnie** do wyznaczonych białych pól.



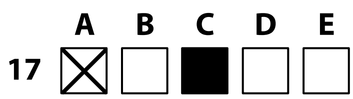
- Jeżeli wymagane jest całe rozwiązanie, przedstaw, oprócz wyniku, cały przebieg rozwiązania. Jeżeli podasz tylko wynik, to nie otrzymasz za to zadanie żadnych punktów.
- **Zapisy obok wyznaczonych** białych pól **nie zostaną ocenione**.
- Błędny zapis przekreśl i zapisz nowe rozwiązanie.

2.2 Wskazówki do zadań zamkniętych

- Poprawną odpowiedź oznacz wyraźnie krzyżykiem w białym polu na karcie odpowiedzi, wg rysunku – dokładnie.



- Jeżeli chcesz zmienić odpowiedź, starannie zakoloruj oznaczone pole, zaś wybraną odpowiedź oznacz krzyżykiem w nowym polu.



- Jakikolwiek inny sposób wpisywania odpowiedzi i wnoszenia poprawek uznany zostanie za odpowiedź błędną.

NIE OTWIERAJ ARKUSZA ZADAŃ, POCZEKAJ NA DECYZJĘ OSOBY NADZORUJĄCEJ!

1 punkt

1 **Rozłóż wyrażenie ze zmienną $x \in \mathbf{R}$ na iloczyn dwumianów liniowych.**

$x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

---

1 punkt

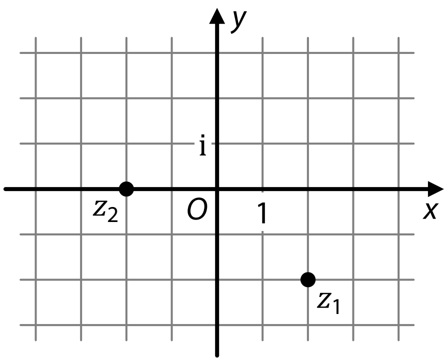
2 Jeśli wielomian $P(x)$ ze zmienną $x \in \mathbf{R}$ podzielimy przez trójmian $(x^2 + x + 2)$, to otrzymamy niepełny iloraz $(x - 2)$ i resztę (-4).

Określ wielomian $P(x)$.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 3

Na płaszczyźnie Gaussa (w punktach przecięcia siatki) zaznaczono liczby zespolone z_1 i z_2.

Dane jest: $z = z_1 : z_2$.



(*CZVV*)

1 punkt

3 **Zapisz liczbę z w postaci trygonometrycznej tak, aby jej argument φ znajdował się w przedziale $\langle 0; 2\pi)$.**

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 4

Zakład produkcyjny wyprodukował zestaw identycznych kosiarek, a koszty produkcji każdej z nich były takie same. Połowę kosiarek zakład sprzedał w cenie o 70% większej, niż wynosiły koszty ich produkcji. Każdą kolejną kosiarkę zakład sprzedaje w cenie o 50% większej niż koszty jej produkcji.

Pomimo tego, że zakład nie sprzedał jeszcze wszystkich kosiarek, pieniądze uzyskane za sprzedane kosiarki już teraz dokładnie pokryły koszty produkcji całego zestawu kosiarek.

(*CZVV*)

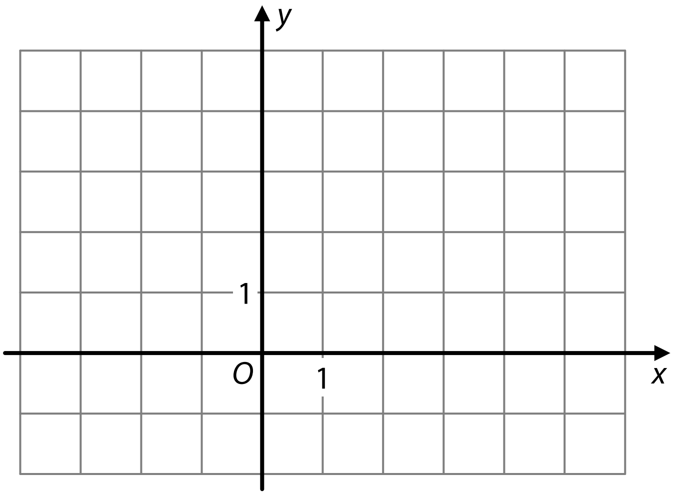
maks. 3 punkty

4 Oblicz, ile procent wszystkich wyprodukowanych kosiarek zakład już sprzedał.

W karcie odpowiedzi przedstaw cały **przebieg rozwiązania**.

TEKST ŹRÓDŁOWY, RYSUNEK I TABELA DO ZADANIA 5

Dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ dana jest funkcja $f\colon y = a^x$, gdzie $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ i dla której dane jest: $a^{x+2} = 2 \cdot a^x$



x	-2	0	2	4
a^x		1		

(*CZVV*)

maks. 2 punkty

5

5.1 Narysuj wykres funkcji f w kartezjańskim układzie współrzędnych *Oxy* i zaznacz na wykresie wszystkie punkty, których współrzędne x są podane w tabeli (oblicz brakujące współrzędne y).

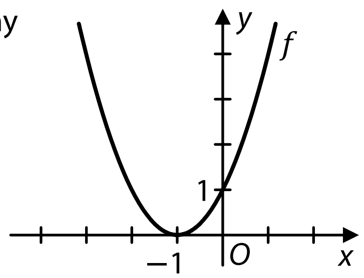
W karcie odpowiedzi popraw wszystko **długopisem**.

5.2 Oblicz wartość $f(1)$.

TEKST ŹRÓDŁOWY I WYKRES DO ZADANIA 6

W kartezjańskim układzie współrzędnych *Oxy* skonstruowany jest wykres funkcji kwadratowej f o dziedzinie **R**.

Dla funkcji g dane jest: $g(x) = -f(x+2)$.



(*CZVV*)

maks. 2 punkty

6

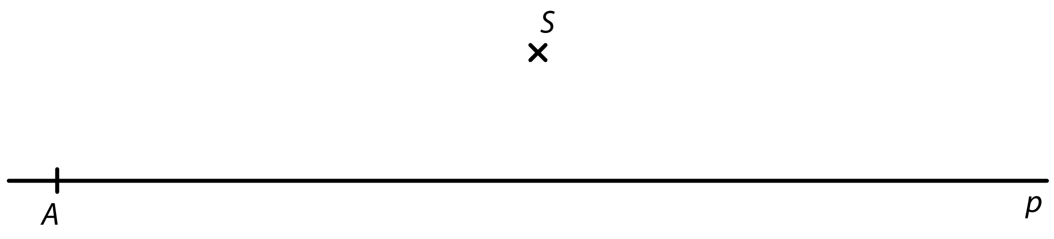
6.1 Dziedzinę funkcji g można zapisać jako sumę ($I_1 \cup I_2$) dwóch przedziałów takich, że w każdym z nich funkcja g jest monotoniczna.

Z obu tych przedziałów podaj ten przedział, w którym funkcja g jest malejąca.

6.2 Określ współrzędne punktu przecięcia *Y* wykresu funkcji g z osią współrzędnych *y*.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 7

Na płaszczyźnie leżą punkty A, S. Przez punkt A przechodzi prosta p.



(*CZVV*)

maks. 3 punkty

7 Punkt A to wierzchołek prostokąta $ABCD$. Na prostej p leży jeszcze wierzchołek C prostokąta.
Punkt S to środek boku CD prostokąta $ABCD$.

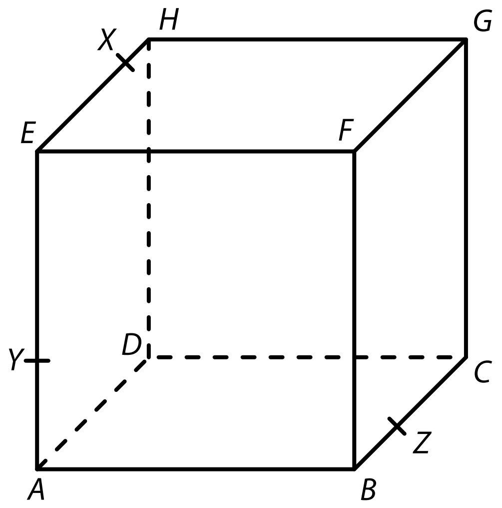
7.1 Szukamy wierzchołków B, C, D prostokąta $ABCD$.
Sporządź szkic prostokąta $ABCD$ i przeprowadź analizę lub opisz przebieg konstrukcji.

7.2 Na rysunku skonstruuj brakujące wierzchołki prostokąta $ABCD$ i narysuj prostokąt.
Znajdź wszystkie rozwiązania.

W karcie odpowiedzi popraw wszystko **długopisem**.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 8

W sześcianie *ABCDEFGH* punkt *X* leży na krawędzi *EH*, punkt *Y* leży na krawędzi *AE* a punkt *Z* na krawędzi *BC*.



(*CZVV*)

maks. 2 punkty

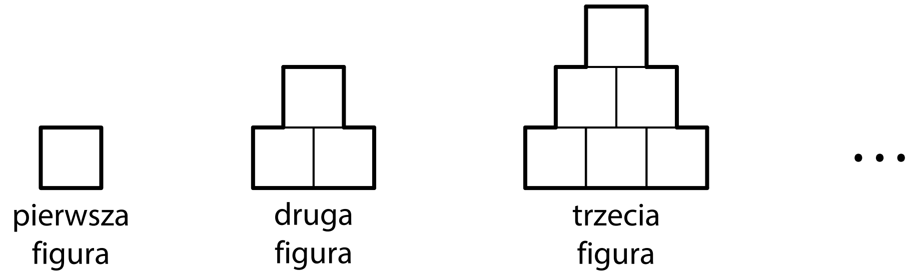
8 Skonstruuj przekrój sześcianu *ABCDEFGH* **płaszczyzną** *XYZ***.**

W karcie odpowiedzi popraw wszystko **długopisem**.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 9

Na rysunku są trzy figury składające się z kwadratów o boku długości 1 cm.

Po tych figurach następują kolejne. Figura z liczbą porządkową $n > 1$ powstanie z poprzedniej figury poprzez dodanie dolnego rzędu, który zawiera n kwadratów.



(*CZVV*)

maks. 3 punkty

9 Jedna z figur składa się z 210 kwadratów.

9.1 Oblicz liczbę porządkową tej figury.

9.2 Oblicz w cm obwód tej figury.

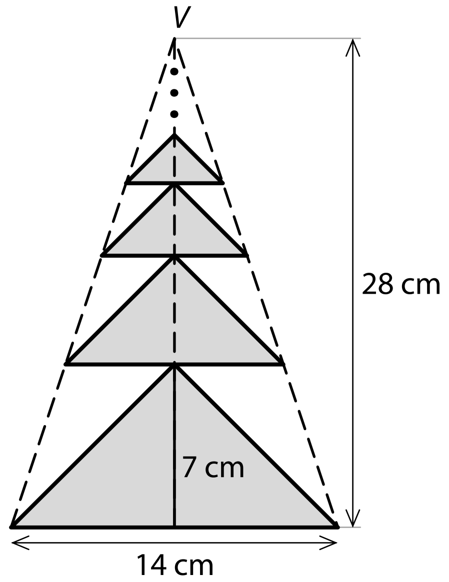
W karcie odpowiedzi przedstaw cały **przebieg rozwiązania** obu części zadania.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 10

Szara figura składa się z nieskończenie wielu trójkątów równoramiennych. Każde dwa sąsiednie trójkąty mają dokładnie jeden wspólny punkt, a mniejszy trójkąt jest obrazem większego w jednokładności o środku *V*. Na rysunku narysowane są tylko 4 trójkąty.

W największym trójkącie długość podstawy wynosi 14 cm i wysokość opuszczona na podstawę wynosi 7 cm.

Wysokość całej figury wynosi 28 cm.



(*CZVV*)

maks. 3 punkty

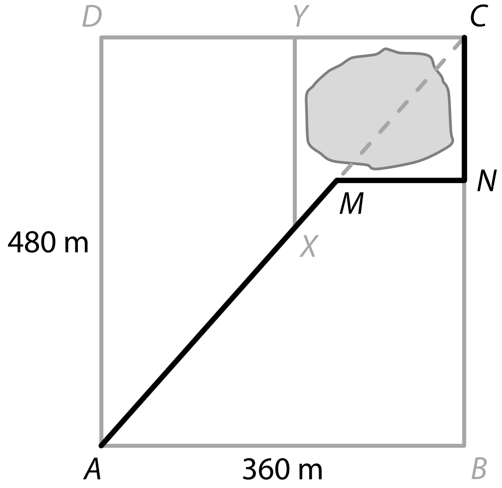
10 Oblicz w cm² pole powierzchni szarej figury.

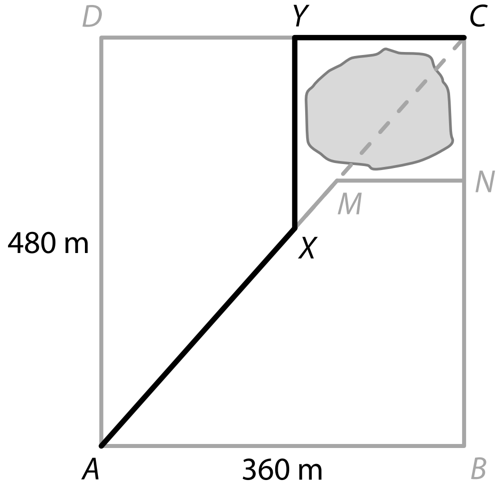
W karcie odpowiedzi przedstaw cały **przebieg rozwiązania**.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 11

Prostokątna działka *ABCD* ma wymiary 360 m i 480 m. Na terenie działki znajduje się staw.

Pierwsza ścieżka między przeciwległymi rogami działki to linia łamana *AMNC*, druga ścieżka to linia łamana *AXYC*. Oba punkty *X*, *M* leżą na przekątnej *AC*, punkty *N*, *Y* leżą na bokach prostokąta a odcinki *MN*, *XY* są równoległe do boków prostokąta.





(*CZVV*)

maks. 4 punkty

11

11.1 W przypadku pierwszej ścieżki długość odcinka *AM* to dwie trzecie długości przekątnej *AC*.

Oblicz stosunek długości odcinka *AM* **do długości linii łamanej** *MNC***.**

11.2 W przypadku drugiej ścieżki długość odcinka *AX* jest taka sama jak długość linii łamanej *XYC*.

Oblicz w metrach długość linii łamanej *AXYC* **reprezentującej drugą ścieżkę.**

W karcie odpowiedzi przedstaw cały **przebieg rozwiązania** obu części zadanie.

maks. 3 punkty

12 **Przyporządkuj do każdego zadania (12.1–12.3) jego rozwiązanie (A–F).**

12.1 Otto ma 8 gier a Szymon 6 gier (wszystkie z 14 gier różnią się od siebie). Otto wymieni którekolwiek 2 swoje gry na dowolne 2 gry Szymona.

Na ile sposobów chłopcy mogą wymienić gry? ______

12.2 Na zegarze cyfrowym każdy prezentowany czas (w godzinach i minutach) między północą a godziną 10 jest wyświetlany w postaci dokładnie **trzech** cyfr (np. 0:08, 0:21, 9:50).

Ile z tych prezentowanych czasów zawiera <u>trzy wzajemnie różne</u> cyfry? ______

12.3 W kinie zostało tylko 5 wolnych miejsc w piątym rzędzie i 2 miejsca w drugim rzędzie. Cztery z siedmiu nowo przybyłych osób chcą usiąść w piątym rzędzie, jedna osoba w drugim rzędzie, a pozostałym dwóm osobom jest obojętne, gdzie będą siedzieć.

Na ile sposobów można rozmieścić tych 7 osób na wolnych miejscach zgodnie z ich wymaganiami? ______

A) 420

B) 432

C) 458

D) 480

E) 486

F) inna liczba

maks. 3 punkty

13 Prosta *p*: $y = x$ przecina krzywą stożkową w punktach *M*, *N*.

Przyporządkuj do każdej krzywej stożkowej (13.1–13.3) odległość (A–F) punktów *M*, *N*.

13.1 Okrąg o środku $S[0; 0]$ przechodzący przez punkt $A[-4; 2]$. ______

13.2 Elipsa określona równaniem $x^2 + 4y^2 - 40 = 0$. ______

13.3 Parabola o wierzchołku $V[0; -1{,}5]$ i ognisku $F[0; -1]$. ______

A) $4\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{10}$

C) 8

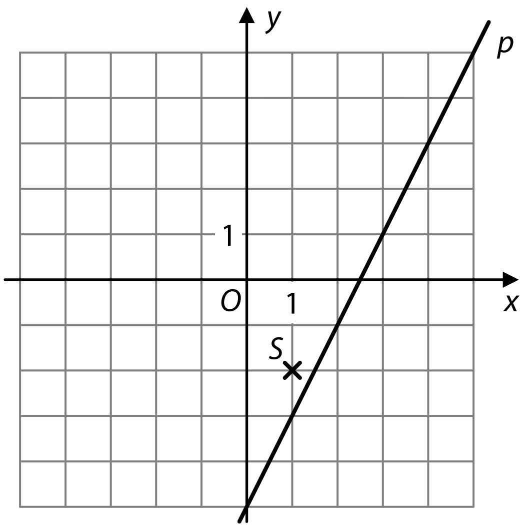
D) $4\sqrt{5}$

E) 16

F) inna odległość

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 14

W kartezjańskim układzie współrzędnych *Oxy* narysowana jest prosta *p* i punkt *S*.



(Punkt *S* jest punktem przecięcia siatki, prosta *p* przechodzi przez 6 punktów przecięcia widocznej części siatki.)

(*CZVV*)

2 punkty

14 Prosta *q* jest obrazem prostej *p* w symetrii środkowej o środku *S*.

Które równanie jest równaniem ogólnym prostej q?

A) $x - 2y + 4 = 0$

B) $x - 2y - 4 = 0$

C) $2x - y + 5 = 0$

D) $2x - y + 3 = 0$

E) $2x - y - 3 = 0$

---

2 punkty

15 **Która nierówność ma w zbiorze R taki sam zbiór wszystkich rozwiązań jak nierówność $x - 1 < 0$?**

A) $\dfrac{x-1}{-3} < 0$

B) $\dfrac{x^2+1}{x-1} < 0$

C) $\dfrac{x^2-1}{x+1} < 0$

D) $\dfrac{x(x-1)}{x} < 0$

E) $\dfrac{x-1}{x^2} < 0$

2 punkty

16 Jest dana liczba:

$$a = \frac{81^{121} - 3^{481}}{27^{60} \cdot 9^{10}}$$

Które zdanie jest prawdziwe?

A) Liczba a nie jest liczbą całkowitą.

B) Liczba a jest liczbą nieparzystą.

C) Liczba a jest wielokrotnością trzynastu.

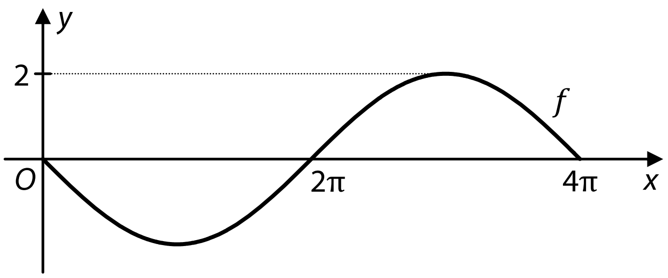
D) Liczba a jest większa niż 81^{71}.

E) Liczba a można zapisać w postaci 3^k, gdzie $k \in \mathbf{N}$.

TEKST ŹRÓDŁOWY I WYKRES DO ZADANIA 17

Wzór funkcji f ze zmienną $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$ ma postać: $y = a \cdot \sin(bx)$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$.

Funkcja f określona jest następującym wykresem.



(CZVV)

2 punkty

17 **Który zbiór jest zbiorem wszystkich argumentów $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$, dla których $f(x) > -1$?**

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 4\pi \right\rangle$

B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 4\pi \right\rangle$

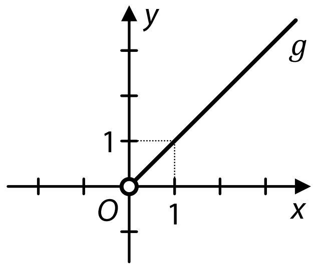
C) $\langle 0; \pi) \cup (\pi; 4\pi \rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{7\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{11\pi}{3}; 4\pi \right\rangle$

E) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right)$

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 18

Półprosta bez punktu początkowego narysowana w kartezjańskim układzie współrzędnych *Oxy* jest wykresem funkcji g.



(*CZVV*)

2 punkty

18 Każda z pięciu funkcji h_1–h_5 jest określona dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$, dla których wyrażenie po prawej stronie jej wzoru ma sens.

Która z funkcji h_1–h_5 ma taki sam wykres jak funkcja g?

A) $h_1\colon y = \dfrac{\log_5 x^2}{\log_5 x}$

B) $h_2\colon y = \dfrac{2x \cdot \log_5 x}{\log_5 x^2}$

C) $h_3\colon y = 5^{\log_5 x}$

D) $h_4\colon y = \log_5 5^x$

E) $h_5\colon y = \dfrac{\left(\log_5 5^x\right)^2}{x}$

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 19

W talii jest 12 kart ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 12. (Każda karta zawiera dokładnie jedną liczbę, żadne dwie karty nie są ponumerowane tą samą liczbą.)

Tasujemy talię i losowo wybieramy dwie karty.

(*CZVV*)

2 punkty

19 **Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma obu liczb na wylosowanych kartach jest podzielna przez sześć?**

A) $\frac{1}{22}$

B) $\frac{4}{33}$

C) $\frac{3}{22}$

D) $\frac{5}{33}$

E) inna wartość prawdopodobieństwa

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 20

Mamy dwie bryły – **walec obrotowy** i **półkulę**.

Wysokość walca jest o połowę większa niż promień r jego podstawy.

Pole powierzchni półkuli (włącznie z podstawą) jest takie same jak pole powierzchni walca. Promień półkuli oznaczmy jako R.

(*CZVV*)

2 punkty

20 **Który wzór wyraża zależność promieni R i r?**

A) $R = r$

B) $R = \frac{5}{3} \cdot r$

C) $R = \sqrt{3} \cdot r$

D) $R = \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot r$

E) $R = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot r$

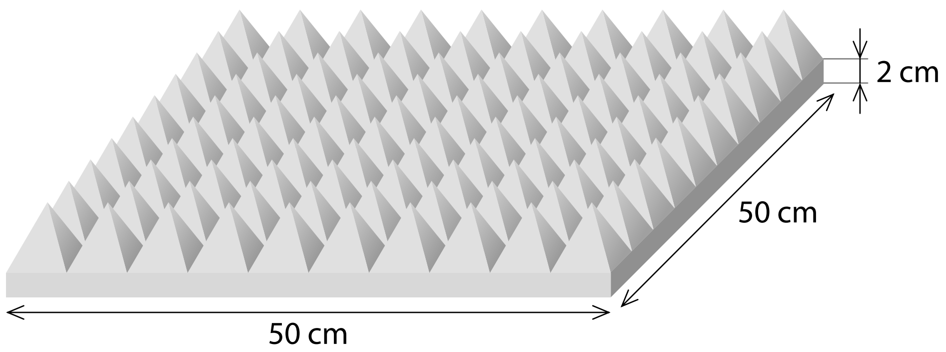
TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 21

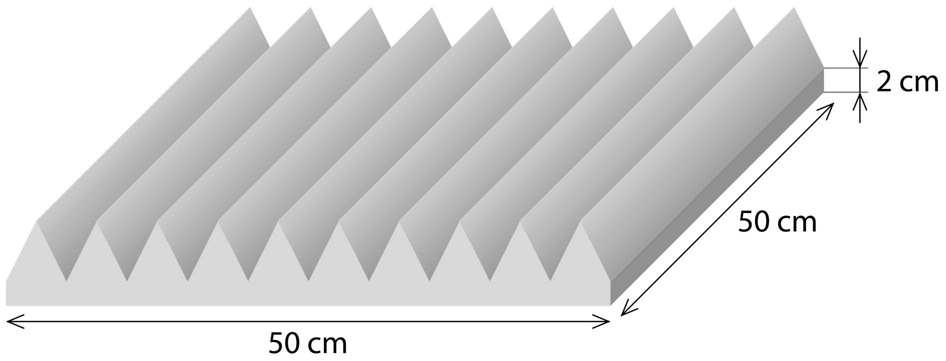
Profilowane płyty z pianki akustycznej produkowane są w dwóch wariantach.

Dolna część każdej płyty jest tworzona **platformą** w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość wynosi 2 cm a krawędź podstawy ma długość 50 cm.

W pierwszym wariancie górną podstawę platformy w całości pokrywa 100 przystających ostrosłupów prawidłowych czworokątnych. Wysokość każdego ostrosłupa jest taka sama jak długość jego krawędzi podstawy.

W drugim wariancie górną podstawę platformy w całości pokrywa 10 przystających graniastosłupów prostych trójkątnych. Podstawa graniastosłupa trójkątnego ma kształt trójkąta równoramiennego, a podstawa tego trójkąta przylega do platformy. W tym trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest taka sama jak długość jego podstawy.





(*CZVV*)

2 punkty

21 Jaki jest stosunek objętości obu wariantów płyt akustycznych (większej objętości do mniejszej)?

A) 27 : 22

B) 14 : 9

C) 3 : 2

D) 2 : 1

E) inny stosunek

TEKST ŹRÓDŁOWY I TABELA DO ZADANIA 22

Dokładnie trzy grupy więźniów A, B, C produkowały kombinezony ochronne dla ratowników medycznych. Każdy więzień z tej samej grupy uszył taką samą liczbę kombinezonów.

W **grupie A** jest p więźniów, a **każdy** z nich uszył $(2p - 1)$ kombinezonów.

Grupa B ma o p więźniów więcej niż grupa A, ale **łącznie** wyprodukowała o p kombinezonów mniej niż grupa A.

Grupa C ma co prawda o 1 więźnia mniej niż grupa A, ale każdy więzień z tej grupy uszył o 2 kombinezony więcej, niż uszył każdy więzień z grupy A.

Grupa	A	B	C
Liczba więźniów	p		
Liczba kombinezonów uszytych przez jednego więźnia	$2p - 1$		
Łączna liczba wyprodukowanych kombinezonów			

(*CZVV*)

maks. 3 punkty

22 Oceń prawdziwość następujących zdań (22.1–22.3).
Zaznacz T – tak, jeśli jest prawdziwe, lub N – nie, jeśli nieprawdziwe.

		T	N
22.1	Spośród wszystkich więźniów, który szyli kombinezony, mniej niż połowa należy do grupy B.	☐	☐
22.2	Każdy więzień z grupy A uszył o p kombinezonów więcej, niż uszył każdy więzień z grupy B.	☐	☐
22.3	Grupa C łącznie wyprodukowała więcej kombinezonów niż grupa A.	☐	☐

SPRAWDŹ, CZY WPISAŁEŚ/AŚ WSZYSTKIE ODPOWIEDZI DO KARTY ODPOWIEDZI.