MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMZD24C0T04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

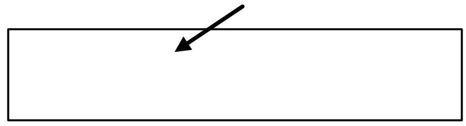
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

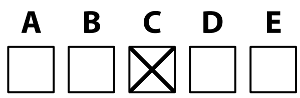
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.

1 

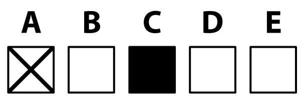
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.

17 

- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.

17 

- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

max. 2 body

1 $$\frac{4a^2-1}{(2a-5)(a+1)^2+5+8a}$$

1.1 Určete, pro která $a \in \mathbf{R}$ má daný výraz smysl.

1.2 Výraz zjednodušte.

Řešení:

$$\frac{4a^2-1}{(2a-5)(a+1)^2+5+8a}=\frac{(2a-1)(2a+1)}{(2a-5)(a^2+2a+1)+5+8a}=$$

$$\frac{(2a-1)(2a+1)}{2a^3+4a^2+2a-5a^2-10a-5+5+8a}=$$

$$\frac{(2a-1)(2a+1)}{2a^3-a^2}=\frac{(2a-1)(2a+1)}{a^2(2a-1)}=\frac{2a+1}{a^2}=\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}$$

$$a \neq 0;\ \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbf{R} \setminus \left\{0;\ \frac{1}{2}\right\}$$

---

max. 2 body

2 Najděte všechna celá nezáporná čísla m, pro něž má posloupnost vlastní limitu.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n^m}{5n^3-1}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n^m}{5n^3-1}=\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$a_n=\frac{n^3\left(\frac{1}{n}+3n^{m-3}\right)}{n^3\left(5-\frac{1}{n^3}\right)} \qquad m \in \mathbf{N_0}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{5} \text{ pro } m=3$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \text{ pro } m \in \{0, 1, 2\}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty \text{ pro } m \geq 4$$

$\Rightarrow$ posloupnost a_n konverguje (má vlastní limitu) pro $m \in \{0, 1, 2, 3\}$

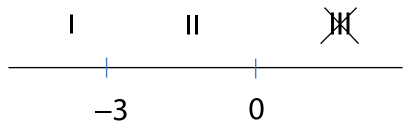
max. 2 body

3 Určete všechna $x \in (-\infty, 0\rangle$, která vyhovují rovnici

$$\frac{5}{|x|+1} = |x+3|$$

Do záznamového archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:



I.

$$\frac{5}{-x+1} = -(x+3) \qquad / \cdot (x-1)$$

$$5 = (x+3)(x-1)$$

$$5 = x^2 + 2x - 3$$

$$0 = x^2 + 2x - 8$$

$$0 = (x-2)(x+4)$$

$$x_{1,2} = -4;\ 2$$

$$2 \notin (-\infty, -3\rangle$$

II.

$$\frac{5}{-x+1} = x+3 \qquad / \cdot (-x+1)$$

$$5 = (x+3)(-x+1)$$

$$5 = -x^2 - 2x + 3$$

$$0 = -x^2 - 2x - 2$$

$$0 = x^2 + 2x + 2$$

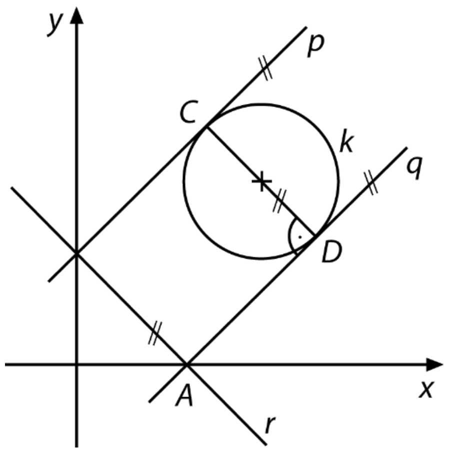
$$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4$$

$$x_{3,4} \in \emptyset$$

$$\boxed{x = -4}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

V kartézské soustavě souřadnic je dána přímka *p* s obecnou rovnicí $y - x - 2 = 0$,
přímka *q*, přímka *r*, kružnice *k* a bod $A[2;0]$.
Přímka *q* prochází bodem *A* a je rovnoběžná s přímkou *p*.
Přímky *p* i *q* jsou tečnami kružnice *k*. Přímka *r* prochází bodem *A* a je rovnoběžná s vyznačenou úsečkou *CD*, jejíž délka je rovna průměru *d* kružnice *k*.



max. 3 body

4

4.1 Napište **parametrické vyjádření** přímky *q*.

4.2 Napište **obecnou rovnici** přímky *r*.

4.3 Vypočtěte průměr *d*.

(Obrázek je pouze ilustrační.)

Řešení:

4.1

p: $y - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \cdot x + 2$

$p \parallel q$; $A[2;0]$

q: $y = 1 \cdot x + b$

$0 = 2 + b \Rightarrow b = -2$

$y = x - 2$

$\boxed{x = t,\ y = t - 2,\ t \in \mathbf{R}}$

ekvivalentně $x = t + 2,\ y = t,\ t \in \mathbf{R}$

4.2

$r \perp q\ (\wedge p)$; $A[2;0]$

$\vec{n} = (1;1)$

$x + y + c = 0$

$2 + 0 + c = 0$

$c = -2$

$\boxed{x + y - 2 = 0}$

4.3

průsečík přímky *p* s osou *y*:

$y - x - 2 = 0$

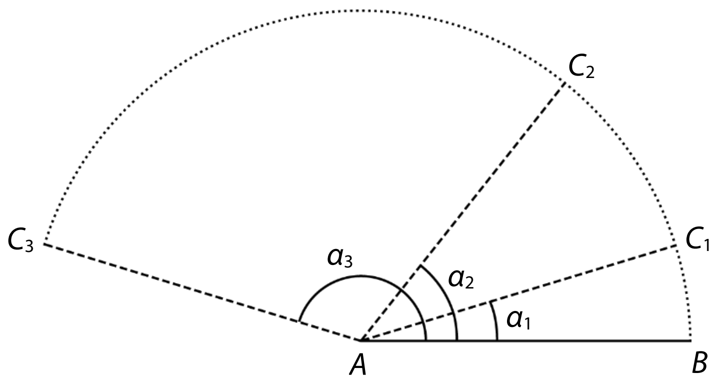
$y - 0 - 2 = 0$

$y = 2 \qquad B[0;2]$

$d = |CD| = |AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Na obrázku jsou znázorněny vrcholy trojúhelníků ABC_k a úhly α_k pro $k \in \{1, 2, 3\}$.



1 bod

5 Najděte **vztah** pro výpočet délky strany BC_k k-tého rovnoramenného trojúhelníku ABC_k v závislosti na zvoleném úhlu $\alpha_k \in (0; \pi)$, jestliže platí: $|AB| = |AC_k| = 5$ cm, přičemž $k \in \{1, 2, 3\}$.

Řešení:

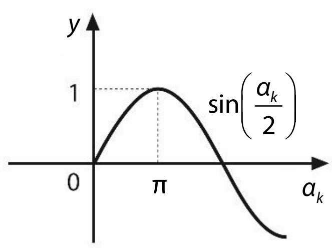
$$|BC_k| = \sqrt{|AB|^2 + |AC_k|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC_k| \cdot \cos\alpha_k}$$

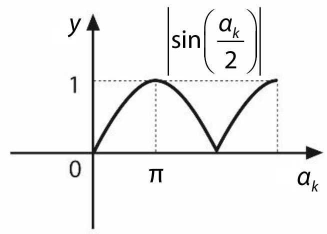
$$|BC_k| = \sqrt{50 - 50 \cdot \cos\alpha_k} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos\alpha_k)} =$$

$$= 5 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot (1 - \cos\alpha_k)}{2}} = 5 \cdot \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)} =$$

$$= 10 \cdot \left|\sin\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)\right| = 10 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)$$

$\alpha_k \in (0; \pi) \wedge k \in \{1, 2, 3\}$





max. 2 body

6 Řešte soustavu rovnic pro neznámé $a, b \in \mathbf{R}$ a $\alpha = 60°$.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = b + \sqrt{a}$$

$$\frac{\alpha}{180°} = \frac{3}{4}b^2$$

Do záznamového archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{4}b^2$$

$$\frac{4}{9} = b^2$$

$$b_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \sqrt{a}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow a \in \emptyset$$

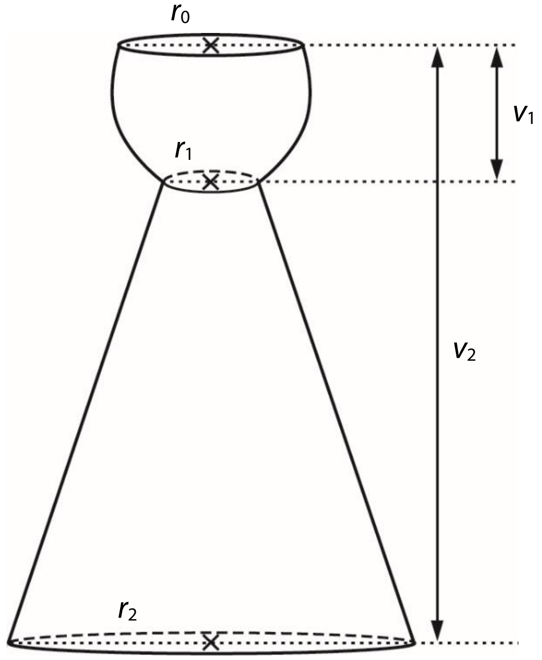
$$\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} + \sqrt{a}$$

$$\frac{3+4}{6} = \sqrt{a} \Rightarrow a = \frac{49}{36}$$

$$\boxed{a = \frac{49}{36};\ b = -\frac{2}{3}}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Váza se skládá ze dvou částí. Spodní část vázy má tvar komolého kužele. Horní část vázy má tvar kulové vrstvy. Obě části mají společnou podstavu.



Rozměry označené na obrázku (vnitřní rozměry vázy):

výška $v_1 = 4{,}5$ cm
výška $v_2 = 20$ cm
poloměr $r_0 = 2{,}75$ cm
poloměr $r_1 = 2{,}0$ cm
poloměr $r_2 = 5{,}5$ cm

max. 3 body

7

7.1 Vypočtěte objem vody V_0, který pojme váza z výchozího textu, jsou-li obě její části naplněny až po horní okraj.
Výsledek uveďte v litrech s přesností na **jedno desetinné místo**.

7.2 Najděte vnitřní poloměr r podstavy takové válcové vázy, která má stejnou výšku a stejný objem jako váza z výchozího textu.
Výsledek uveďte v centimetrech s přesností na **jedno desetinné místo**.

Mezivýsledky nezaokrouhlujte.
Do záznamového archu uveďte u obou podúloh celý **postup řešení**.

Řešení:

7.1 dosazení do vzorců z tabulek (objem komolého kužele; objem kulové vrstvy)

$$V_0 = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \frac{\pi(v_2 - v_1)}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_1 = \frac{\pi(20 - 4{,}5)}{3}(2^2 + 2 \cdot 5{,}5 + 5{,}5^2)$$

$$V_2 = \frac{\pi v_1}{6}\left(3r_1^2 + 3r_0^2 + v_1^2\right)$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 4{,}5}{6}\left(3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2{,}75^2 + 4{,}5^2\right)$$

$$V_0 \doteq 864\ \text{cm}^3 \doteq 0{,}9\ \text{l}$$

7.2

$$V = V_0 = \pi r^2 \cdot v_2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V_0}{\pi v_2}}$$

$$r \doteq 3{,}7\ \text{cm}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Je dána geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, přičemž $a_1 = 8$ a $a_6 = \frac{1}{4}$. Členy a_n této posloupnosti jsou tvořeny vybranými hodnotami exponenciální funkce $f(x)$ pro $x = n$.

max. 2 body

8

8.1 Najděte **předpis** funkce $f(x)$ z výchozího textu, víte-li, že tímto předpisem je funkce definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

8.2 Uvažujte funkci $h(x) = \begin{cases} a_1, & -2 \le x \le 1 \\ f(x), & 1 \le x \end{cases}$

Zakreslete graf funkce $h(x)$ do čtvercové sítě pro $x \in \langle -2; 6 \rangle$.

Vyznačte body $[n; a_n]$ pro $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

V záznamovém archu obtáhněte řešení (tj. graf funkce a všechny body) propisovací tužkou.

Řešení:

8.1

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{1}{32}$$

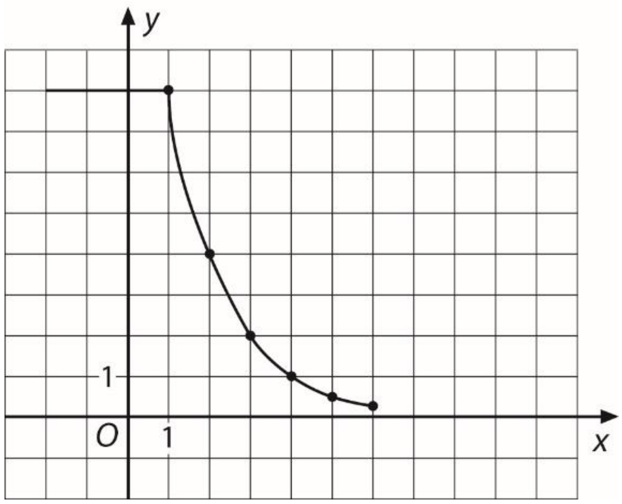
$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$

$$q^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$f(x = 1) = 8$
$f(x = 2) = 4$
$f(x = 3) = 2$ atd.

$\boxed{f(x) = 2^{4-x},\ x \in \mathbf{R}}$

8.2



2 body

9 Uvažujte funkci s předpisem

$$f: y = \frac{ax+b}{x-c}, x \in \mathbf{R} \setminus \{c\}$$

Určete hodnoty parametrů *a, b* a *c* tak, aby platilo: *f* je lichá a není konstantní. Najděte všechny možnosti.

Řešení:

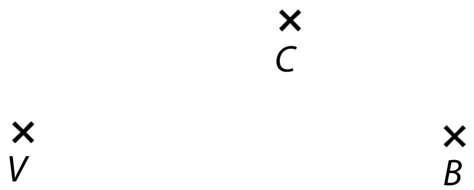
$$f(-x) = \frac{-ax+b}{-x-c} = \frac{ax-b}{x+c}$$

$$-f(x) = \frac{-ax-b}{x-c}$$

$f(-x) = -f(x) \wedge f(x) \neq k,\ k \in \mathbf{R}$, pro $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{c\}$, je-li $a = 0 \wedge c = 0 \wedge b \in \mathbf{R}$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V rovině jsou dány body B, C a V.



max. 3 body

10 Na ose konvexního úhlu BVC leží body M a N a platí, že $|VM| = 5$ cm a $|MN| = \frac{1}{2}|VM|$.

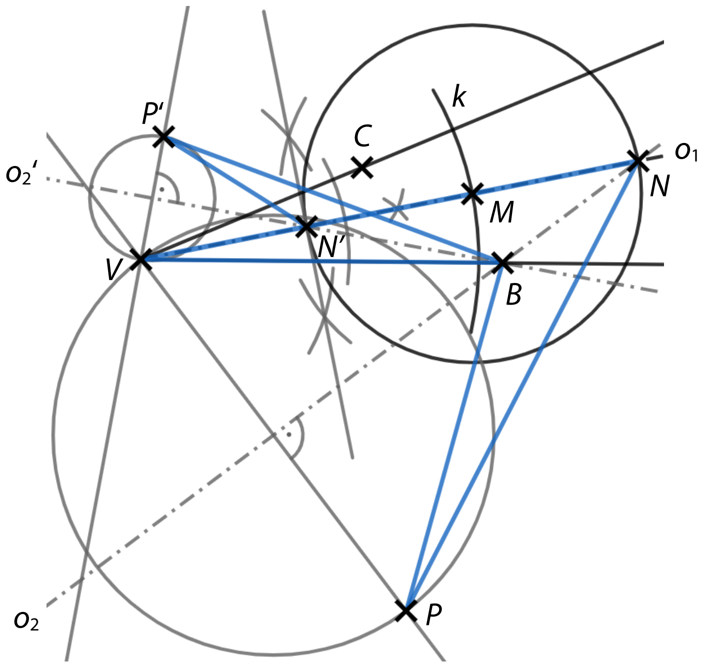
10.1 Sestrojte body M, N a narýsujte nekonvexní čtyřúhelník $VBPN$ osově souměrný podle osy o, která prochází body B a N. **Najděte všechna řešení.**

10.2 Zapište postup konstrukce.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

10.1



10.2

1. $\mapsto VC$
2. $\mapsto VB$
3. o_1; o_1 osa úhlu *BVC*
4. *k*; *k* (*V*; 5 cm)
5. *M*; $k \cap o_1 = \{M\}$
6. *N*; $N \in o_1 \wedge |VM| = 2 \cdot |MN|$
7. o_2; $o_2 = \leftrightarrow BN$
8. *P*; $O(o_2)$: $V \mapsto P$
9. čtyřúhelník *VBPN*

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Jsou dány elipsa ε: $4x^2 + 9y^2 - 32x - 108y + 352 = 0$ a přímka p: $y = 5$. Dále je dán vektor posunutí elipsy ve směru osy y: $\vec{v} = (0, t)$, kde $t \in \mathbf{R}$.

max. 3 body

11 Určete, jakých všech hodnot může nabývat souřadnice *t* vektoru posunutí $\vec{v}$, aby přímka *p* neprotínala elipsu *ε* v žádném bodě.

Do záznamového archu uveďte celý **postup řešení.**

Řešení:

$$4x^2 + 9y^2 - 32x - 108y + 352 = 0$$

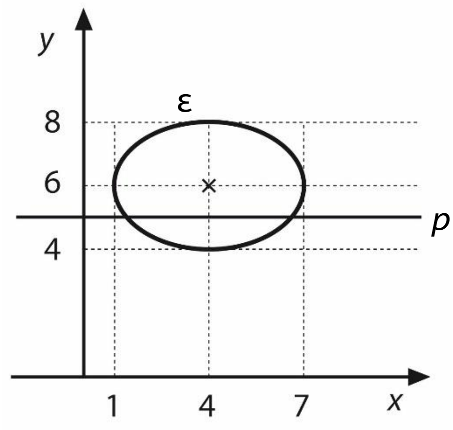
$$4x^2 - 32x + 9y^2 - 108y + 352 = 0$$

$$4(x-4)^2 - 64 + 9(y-6)^2 - 324 + 352 = 0$$

$$4(x-4)^2 + 9(y-6)^2 = 36 \qquad /:36$$

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$$

$$\boxed{t \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)}$$



max. 3 body

12 Přiřaďte ke každé podúloze (12.1–12.3) odpověď (A–F), která jednoznačně vyplývá ze zadání.

12.1 Délka hlavní poloosy hyperboly je 2. Souřadnice *y* středu hyperboly je 6. Určete délku vedlejší poloosy hyperboly.

F

12.2 Určete, kolikrát je průměr první kružnice větší než průměr druhé kružnice, pokud obvod první kružnice je devětkrát větší než obvod druhé kružnice.

E

12.3 Bod $Q[-2; 6]$ je jedním z hlavních vrcholů elipsy. Jeden z jejích vedlejších vrcholů je totožný s počátkem soustavy souřadnic. Určete, kolikrát je třeba zmenšit délku hlavní poloosy elipsy, aby se z elipsy stala kružnice.

B

A) 2

B) 3 **12.3**

C) 4

D) 6

E) 9 **12.2**

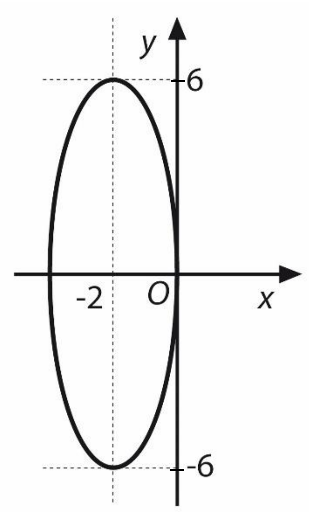
F) K jednoznačnému určení chybí údaj. **12.1**

Řešení:

12.1 Uvažujme rovnici hyperboly. Vidíme, že nemáme k dispozici dostatek údajů.

12.2 $o_1 = 2\pi r_1 = \pi d_1 = 9\pi d_2 = 9o_2 \Rightarrow o_1 = 9o_2$

12.3



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V tombole se hraje o hlavní cenu v podobě zájezdu k moři. Losuje se jen tato hlavní cena. Tomboly se účastní 49 lidí, z nichž 3 koupili po 4 lístcích, 2 koupili po 3 lístcích, 16 po 2 lístcích a zbytek po 1 lístku. Každý účastník koupil daný počet lístků pouze sám pro sebe. Každý koupený lístek je soutěžní a má stejnou pravděpodobnost výhry. Do tomboly jsou zařazeny pouze všechny koupené lístky.

max. 3 body

13 Přiřaďte ke každé podúloze (13.1–13.3) odpovídající výsledek (A–F).

13.1 Jaká je pravděpodobnost, že Jan vyhraje hlavní cenu, pokud patří do skupiny s nejvyšším počtem koupených lístků **na jednotlivce**? **C**

13.2 Tereza si koupila dva lístky. Kdyby si Tereza koupila o tři lístky víc, jaká by byla pravděpodobnost její výhry? (Předpokládejte, že počet ostatních koupených lístků zůstane stejný.) **D**

13.3 Moderátor oznamuje, že výhercem se stal jeden z těch, kteří si koupili pouze jeden lístek. Jaká je pravděpodobnost, že z této skupiny účastníků vyhráli manželé Svobodovi (žena i muž koupili každý právě jeden lístek)? **E**

Výsledky vyjádřete v procentech a zaokrouhlete na jednotky procent.

A) 3 %

B) 4 %

C) 5 % **13.1**

D) 6 % **13.2**

E) 7 % **13.3**

F) 10 %

Řešení:

49 účastníků

počty lístků:

$3 \cdot 4 = 12$

$2 \cdot 3 = 6$

$16 \cdot 2 = 32$

… 21 účastníků; 49 – 21 = 28 … zbývající počet účastníků

$28 \cdot 1 = 28$

celkový počet lístků: 78

13.1 $\dfrac{4}{78} \doteq 0{,}051 \Rightarrow 5\ \%$

13.2 $\dfrac{5}{81} \doteq 0{,}062 \Rightarrow 6\ \%$

13.3 $\dfrac{2}{28} \doteq 0{,}071 \Rightarrow 7\ \%$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Pomocí vztahu pro výpočet hustoty tělesa $\rho = \frac{m}{V}$, kde m je hmotnost tělesa a V je jeho objem, lze odvodit vzorec pro výpočet poloměru r koule o hmotnosti $m_0 > 0$, jejíž hustota je rovna polovině rozdílu hustot $\rho_1 > 0$ a $\rho_2 > 0$ dvou koulí.

2 body

14 Která z následujících možností představuje vzorec popsaný ve výchozím textu?

A) $r = \dfrac{3m_0}{2\pi(\rho_1 - \rho_2)}$

B) $r = \dfrac{2\pi|\rho_1 - \rho_2|}{3m_0}$

C) $r = \sqrt[3]{\dfrac{2\pi(\rho_1 - \rho_2)}{3m_0}}$

D) $r = \sqrt[3]{\dfrac{3m_0}{2\pi|\rho_1 - \rho_2|}}$

E) $r = \sqrt[3]{\dfrac{2|\rho_1 - \rho_2|}{3\pi \cdot m_0}}$

Řešení:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$m > 0, V > 0 \Rightarrow \rho > 0$ (platí obecně) $\Rightarrow \rho_0 > 0$

$$(\rho_1 > \rho_2 > 0 \vee \rho_2 > \rho_1 > 0) \Rightarrow \rho_0 = \frac{|\rho_1 - \rho_2|}{2}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = V_0 = \frac{m_0}{\rho_0} = \frac{2m_0}{|\rho_1 - \rho_2|}$$

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{2\pi|\rho_1 - \rho_2|}}}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Jsou dány intervaly $(-\infty, K\rangle$, $\langle L, +\infty)$ a (a, b), přičemž $K > L$, $a < b$; $K, L, a, b \in \mathbf{R}$.

Množina $\mathrm{M} = (-\infty, K\rangle \cap \langle L, +\infty)$.

2 body

15 Které z následujících tvrzení <u>není</u> ve sporu s výchozím textem pro libovolnou čtveřici reálných čísel *K, L, a, b*?

A) Existuje K, pro které $\mathrm{M} = \emptyset$.

B) $(a, b) \cap \mathrm{M} \neq \emptyset \Leftrightarrow (a < L \wedge b < K)$

C) $(a, b) \subset \langle K, +\infty) \Rightarrow (a, b) \cap \mathrm{M} \neq \emptyset$

D) $(a < L \wedge b > K) \Rightarrow (a, b) \subset \langle L, +\infty)$

E) $\mathrm{M} \cap (a, b) = (a, K\rangle \Leftrightarrow [(a, b) \subset \langle L, +\infty) \wedge b > K]$

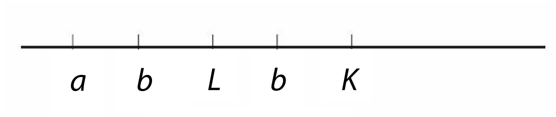
Řešení:

$\mathrm{M} = \langle L, K\rangle$

obr. 15a

Tvrzení v A) neplatí, protože $K > L$ (obr. 15a).

Z nerovnosti $b < K$ vyplývá, že b může být větší a zároveň menší než L (viz obr. 15b), tzn. implikace směrem doleva neplatí, a tedy tvrzení v B) neplatí.

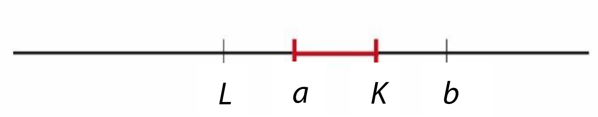


obr. 15b

obr. 15c

Z obr. 15 (c) je zřejmé, že tvrzení v C) neplatí.

obr. 15d



obr. 15e

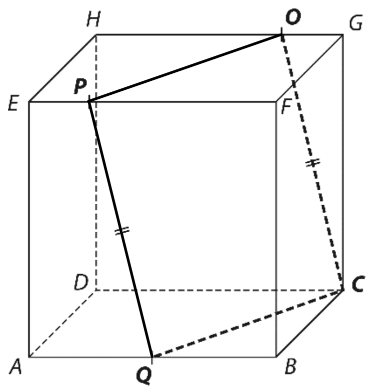
Z obr. 15d je zřejmé, že interval (a, b) není vlastní podmnožinou intervalu $\langle L, +\infty)$, tedy tvrzení v D) neplatí.

Pravdivost tvrzení v E) plyne z obr. 15e.

2 body

16 **Který z následujících obrázků <u>nepředstavuje</u> řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *O, P a Q*? Bod *S* leží ve středu a bod *R* ve čtvrtině délky dané hrany od jejího krajního vrcholu.**

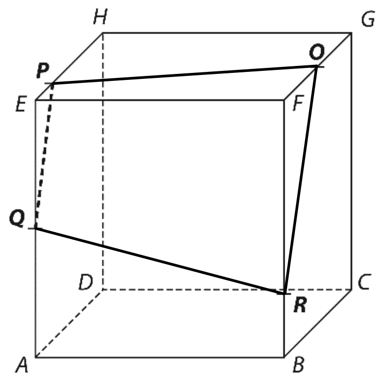
A)



$O \in GH, P \in EF, Q \in AB,$

$|GO| = \frac{1}{4}|GH|,\ |EP| = \frac{1}{4}|EF|,\ |AQ| = \frac{1}{2}|AB|$

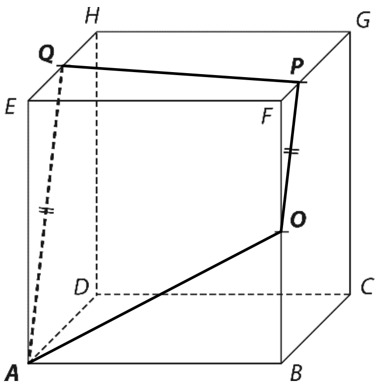
B)



$O \in FG, P \in EH, Q \in AE, R \in BF,$

$|FO| = \frac{1}{2}|FG|,\ |EP| = \frac{1}{4}|EH|,\ |AQ| = \frac{1}{2}|AE|$

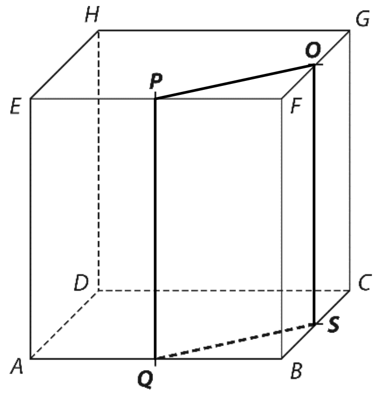
C)



$O \in BF, P \in FG, Q \in EH,$

$|BO| = \frac{1}{2}|BF|,\ |FP| = \frac{1}{4}|FG|,\ |EQ| = \frac{1}{2}|EH|$

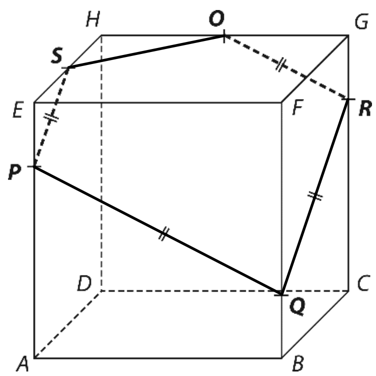
D)



$O \in FG, P \in EF, Q \in AB, S \in BC,$

$|FO| = \frac{1}{2}|FG|,\ |EP| = \frac{1}{2}|EF|,\ |AQ| = \frac{1}{2}|AB|$

E)



$O \in GH, P \in AE, Q \in BF, R \in CG, S \in EH,$

$|GO| = \frac{1}{2}|GH|,\ |EP| = \frac{1}{4}|AE|,\ |BQ| = \frac{1}{4}|BF|$

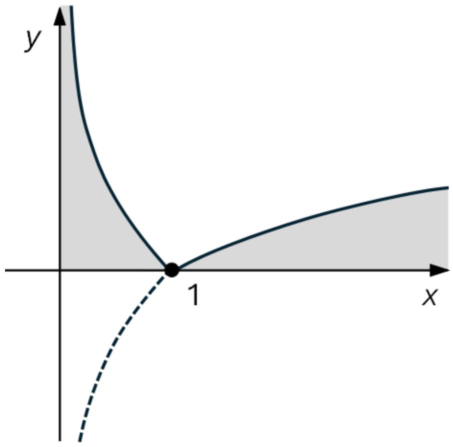
Řešení:

Správná odpověď je B), jelikož úsečka *OR* není rovnoběžná s úsečkou *PQ*. Chybné je umístění bodu *R*. Bod *R* má být totožný s bodem *B*.

Úlohu lze řešit také početně na základě údajů pod obrázky.

2 body

17 **Která z níže uvedených možností popisuje šedou plochu ohraničenou křivkou (graf funkce) a souřadnicovými osami *x* a *y* v prvním kvadrantu?** (Obrázek je pouze ilustrační. Předpokládejte, že osy, křivka i šedá plocha pokračují do nekonečna.)



A) $0 \le y < \log_5 x$ pro $x \in (0, +\infty)$

B) $0 \le y \le |\log_5 x|$ pro $x \in (0, +\infty)$

C) $0 \le y \le |e^{-5x} - 1|$ pro $x \in (0, +\infty)$

D) $0 \le y \le e^{-5x}$ pro $x \in (0,1\rangle$ $\wedge$ $0 \le y \le \log_5 x$ pro $x \in (1, +\infty)$

E) $0 \le y \le x^{-5}$ pro $x \in (0,1\rangle$ $\wedge$ $0 \le y \le \log_5 x$ pro $x \in (1, +\infty)$

Řešení:

Spojitá funkce, jejíž část je vyznačena přerušovanou čarou, odpovídá svým tvarem logaritmické funkci $\log_5 x$. Položíme-li $f(x) = \log_5 x$ pro $x \in (0, +\infty)$ a $g(x) = |\log_5 x|$ pro $x \in (0, +\infty)$, pak platí, že $g(x) = -f(x)$ pro $x \in (0,1\rangle$ a $f(x) = g(x)$ pro $x \in (1, +\infty)$.
Nerovnosti v možnostech A)–E) popisují plochy omezené danou křivkou a přímkou $y = 0$.
Vyznačené šedé ploše tedy odpovídá možnost B).

2 body

18 **Se kterým z následujících výrazů je pro $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ekvivalentní výraz $\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2\cos x \cos y} \cdot \frac{\sin 2x}{2\cos^2 x}$?**

A) 0

B) $\frac{\sin y}{\cos^2 x}$

C) $\mathrm{tg}\, x$

D) $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y$

E) $\mathrm{tg}^2 x$

Řešení:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos(-y) + \sin(-y)\cos x = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2\cos x \cos y} \cdot \frac{\sin 2x}{2\cos^2 x} = \frac{2\sin x \cos y}{2\cos x \cos y} \cdot \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \mathrm{tg}^2 x$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 19

Součet s_k prvních k členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je roven sumě $\sum_{n=1}^{k} n$, kde $k \in \mathbf{N}$. Pro aritmetickou posloupnost $(b_m)_{m=1}^{\infty}$ platí: $b_1 = 7$, diference $d = -\frac{1}{2}$.

2 body

19 **Která z následujících možností obsahuje právě všechna $n \in \mathbb{N}$, pro něž existuje nějaké $m \in \mathbb{N}$ takové, že platí $a_n = b_m$?**

A) 5

B) 7

C) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

D) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

E) Takové n neexistuje.

Řešení:

$b_1 = 7 \qquad a_n = n \qquad \forall n \in \mathbf{N}$

$b_2 = 6{,}5 \qquad a_1 = 1$

$b_3 = 6 \qquad a_2 = 2$

$\ldots \qquad a_3 = 3$

$b_{15} = 0 \qquad \ldots$

$\ldots$

$b_1 = a_7$

$b_3 = a_6$

$\ldots \qquad n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

$b_{13} = a_1$

---

2 body

20 Jsou dána komplexní čísla $z_1 = \dfrac{1}{4\mathrm{i}}$ a $z_2 = 2 \cdot \left[\left(\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)\right)\right]$.

Který z následujících číselných výrazů odpovídá absolutní hodnotě komplexního čísla $\dfrac{z_2}{z_1}$?

A) 8

B) 4

C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{16}$

D) $\dfrac{1}{4(\sqrt{3}+1)}$

E) $\dfrac{1}{8}$

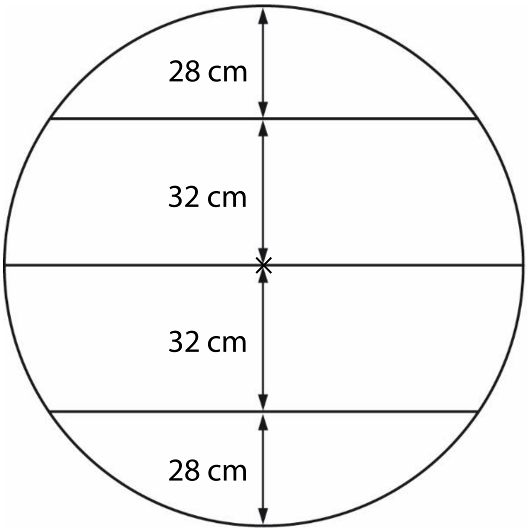
Řešení:

$$\frac{1}{z_1} = 4\mathrm{i}$$

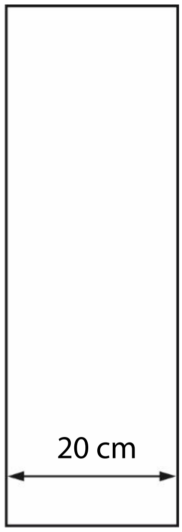
$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = 2 \cdot 4 = 8$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Nástěnná dřevěná knihovna se skládá ze tří obdélníkových polic, zadní kruhové desky a boční stěny, kterou tvoří plášť válce. Rozměry knihovny jsou uvedeny na obrázku. Symbol × značí střed knihovny. Délka každé police je znázorněná na obrázku. Šířka každé police je 20 cm.



pohled zepředu



pohled z boku

2 body

21 Kolik cm² dřeva je potřeba na výrobu této knihovny? (Odřezky a tloušťku materiálu neuvažujte.)

Mezivýsledky nezaokrouhlujte a výslednou plochu zaokrouhlete na desítky.

A) 23 280

B) 24 110

C) 24 190

D) 25 190

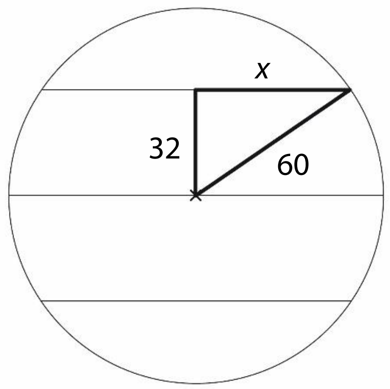
E) 25 310

Řešení:

Délku kratší police označíme jako 2*x*.

$x = \sqrt{60^2 - 32^2} = \sqrt{2\,576} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 161} = 4 \cdot \sqrt{161}$ cm

$2x = 8 \cdot \sqrt{161}$ cm



Hloubku knihovny (šířku polic) označíme jako *y*, poloměr knihovny písmenem *r*.

dvě kratší police: $S_1 = (2x \cdot y) \cdot 2 = (8 \cdot \sqrt{161} \cdot 20) \cdot 2 = 320 \cdot \sqrt{161}$ cm²

jedna delší police: $S_2 = 2r \cdot y = 120 \cdot 20 = 2\,400$ cm²

zadní deska: $S_3 = \pi r^2 = 3\,600\pi$ cm²

boční stěna: $S_4 = 2\pi r \cdot y = 2\pi \cdot 60 \cdot 20 = 2\,400\pi$ cm²

$$S = \sum_{i=1}^{4} S_i = 6000\pi + 2400 + 320 \cdot \sqrt{161} \doteq 25\,309{,}9\ \text{cm}^2 \doteq 25\,310\ \text{cm}^2$$

max. 3 body

22 Jsou dána kombinační čísla $A = \binom{8}{4}$ a $B = \binom{8}{k}$, kde k je celé nezáporné číslo a $k \leq 8$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
22.1	Rovnice $(A^2 - 4\,900)x = 0$ pro neznámou $x \in \mathbf{R}$ má právě jeden kořen.	☐	☒
22.2	Pro $k = 5$ platí, že $\frac{B}{A} = 0{,}8$.	☒	☐
22.3	Největší možná hodnota součinu $A \cdot B$ nastává pro $k = 4$.	☒	☐

Řešení:

$k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

22.1

$A = \binom{8}{4} =$

$= \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$

$70^2 = 4\,900$

$(4\,900 - 4\,900)x = 0$

$0 \cdot x = 0$

$x \in \mathbf{R}$ (nekonečně mnoho řešení)

22.2

$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$

$\binom{8}{4} = 70$

$\frac{B}{A} = \frac{56}{70} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

22.3

V součinu $A \cdot \mathrm{B}$ je rozhodující člen $\binom{8}{k}$ (A na k nezávisí); $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} < \binom{8}{4}$, hodnoty $\binom{8}{k}$ symetricky klesají, tj. hodnota $\binom{8}{k}$ je největší pro $k = 4$.

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.