MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD24C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

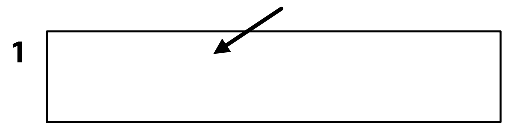
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

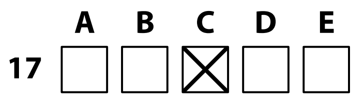
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



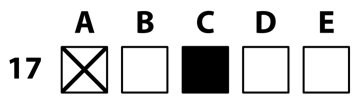
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 **Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0{,}2\}$ zjednodušte:**

$$\frac{(5x-1)^{-2}}{(1-5x)^{-3}} - 1 =$$

Řešení:

$$\frac{(5x-1)^{-2}}{(1-5x)^{-3}} - 1 = \frac{\frac{1}{(5x-1)^2}}{\frac{1}{(1-5x)^3}} - 1 = \frac{1}{(5x-1)^2} \cdot \frac{(1-5x)^3}{1} - 1 = \frac{(1-5x)^3}{(5x-1)^2} - 1 =$$

$$= \frac{(1-5x)^3}{(1-5x)^2} - 1 = 1 - 5x - 1 = -5x$$

---

1 bod

2 Pro všechny přípustné hodnoty reálné proměnné x je dán výraz:

$$\frac{3x^2 + 11x - 4}{3x^2 - 10x + 3}$$

Určete všechny hodnoty x, pro které je hodnota daného výrazu rovna nule.

Řešení:

$$\frac{3x^2 + 11x - 4}{3x^2 - 10x + 3} = 0$$

$$3x^2 - 10x + 3 \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x_1 \neq 3 \quad x_2 \neq \frac{1}{3}$$

$$3x^2 + 11x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{-11 \pm 13}{6}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Vzhledem k výše uvedenému

$$K = \{-4\}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Cestovní kancelář nakoupila všechna hotelová místa za jednotnou cenu. Nákupní cena každého místa byla o 60 % nižší než prodejní cena, kterou za toto místo cestovní kancelář utržila. Cestovní kanceláři se podařilo prodat pouze 80 % všech nakoupených míst.

1 bod

3 Vypočtěte, o kolik procent více cestovní kancelář utržila za prodaná místa, než zaplatila za nákup všech hotelových míst.

Řešení:

prodejní cena hotelového místa: x

nákupní cena hotelového místa: $0{,}4x$

prodáno hotelových míst: $0{,}8x$

$$p = \frac{0{,}8x}{0{,}4x} \cdot 100\,\% = 200\,\%$$

Kancelář utržila o 100 % více za hotelová místa, než zaplatila za jejich nákup.

Příklad:

Nakoupili 100 pokojů.	Prodali 80 pokojů.
Nákupní cena: 400 Kč za pokoj	Prodejní cena: 1 000 Kč za pokoj
Zaplatili: 40 000 Kč	Utržili: 80 000 Kč

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Propiska stála p korun, poté byla zlevněna o $2p$ procent ($p \in \mathbf{N}$), a nyní tak stojí 12 korun.

max. 2 body

4 Určete, kolik korun mohla propiska stát před zlevněním.
Najděte všechna řešení.

Řešení:

cena propisky: p

sleva: $2p$ %

nová cena: 12 Kč

$$12 = p - \frac{2p}{100} \cdot p$$

$$1200 = 100p - 2p^2$$

$$-2p^2 + 100p - 1200 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2p^2 - 100p + 1200 = 0$$

$$p^2 - 50p + 600 = 0$$

$$(p - 20) \cdot (p - 30) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 1 \cdot 600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{50 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = 20 \quad x_2 = 30$$

Propiska mohla stát 20 Kč nebo 30 Kč.

max. 2 body

5 Je dána rovnice s neznámou x a parametrem $m \in$ **R**:

$$\frac{2x + m + 1}{x - 1} = m$$

Určete všechny hodnoty parametru m, pro něž má daná rovnice v oboru R právě jedno řešení.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{2x+m+1}{x-1} = m$$

$$x \neq 1$$

$$2x+m+1 = m \cdot (x-1)$$

$$2x+m+1 = mx - m$$

$$2x - mx = -2m - 1$$

$$(2-m) \cdot x = -2m - 1$$

$$m = 2$$

$$(2-2) \cdot x \neq -2 \cdot 2 - 1$$

$$0 \neq -5$$

$$m \neq 2 \Rightarrow x = \frac{-2m-1}{2-m} = \frac{2m+1}{m-2}$$

$$\frac{2m+1}{m-2} \neq 1$$

$$2m+1 \neq m-2$$

$$m \neq -3$$

$$m \in R \setminus \{-3; 2\} \quad \dots \quad K = \left\{\frac{2m+1}{m-2}\right\}$$

$$m = -3 \quad \dots \quad K = \emptyset$$

$$m = \;\; 2 \quad \dots \quad K = \emptyset$$

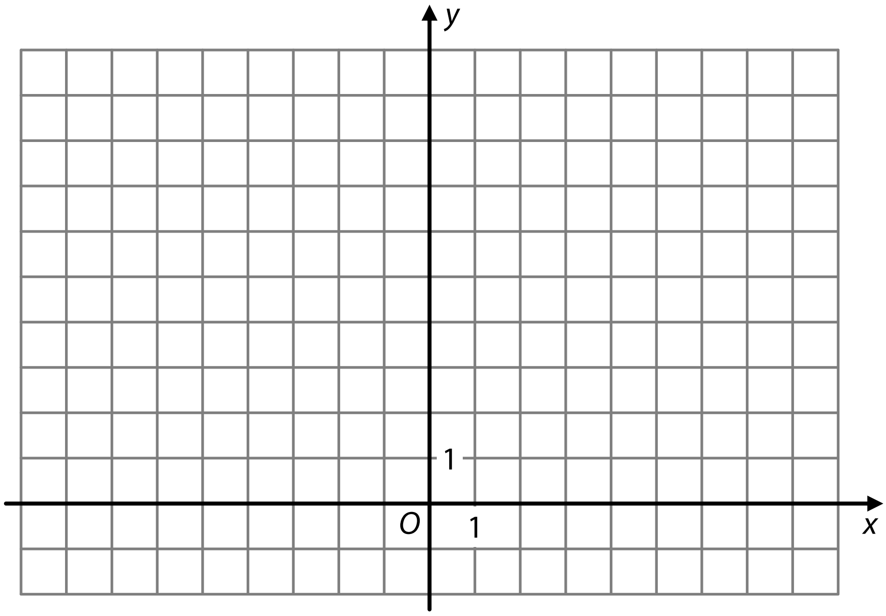
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ jsou dány tři funkce:

$f_1(x) = 4 + \frac{x}{2}$

$f_2(x) = 6 - \frac{x}{2}$

$f_3(x) = 4 - x$

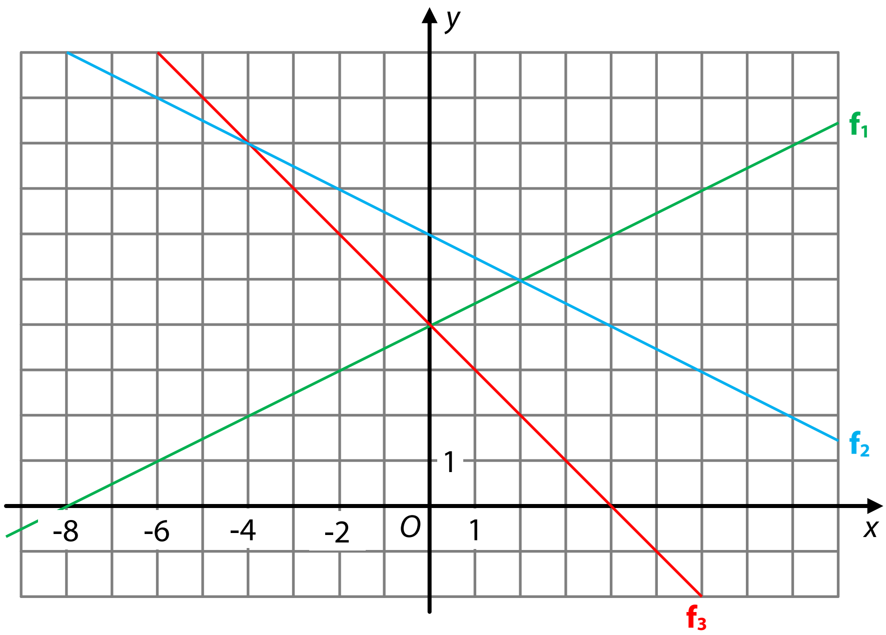


max. 2 body

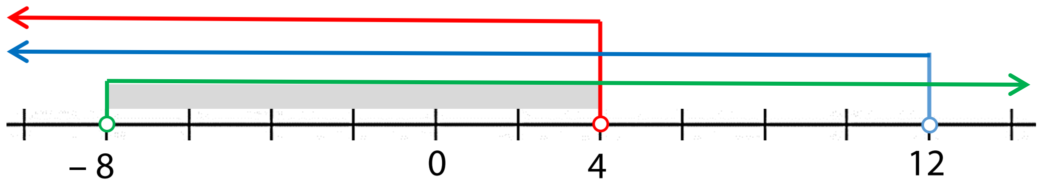
6 Pro některá čísla a platí, že funkční hodnoty $f_1(a)$, $f_2(a)$ a $f_3(a)$ jsou čísla **celá**, **kladná** a navzájem **různá**.

Určete všechna taková čísla a.

Řešení:



$4 + \frac{x}{2} > 0$ $8 + x > 0$ $x > -8$	$6 - \frac{x}{2} > 0$ $12 - x > 0$ $x < 12$	$4 - x > 0$ $x < 4$



$$x \in \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

Lichá čísla nesplňují podmínku zadání, aby funkční hodnoty $f_1(a), f_2(a), f_3(a)$ byla celá čísla. Proto množinu x můžeme zúžit na sudá čísla.

$$x \in \{-6; -4; -2; 0; 2\}$$

	– 6	–4	**–2**	0	2
$f_1(x) = 4 + \frac{x}{2}$	1	2	3	**4**	**5**
$f_2(x) = 6 - \frac{x}{2}$	9	**8**	7	6	**5**
$f_3(x) = 4 - x$	10	**8**	6	**4**	2
závěr	ano	ne	ano	ne	ne

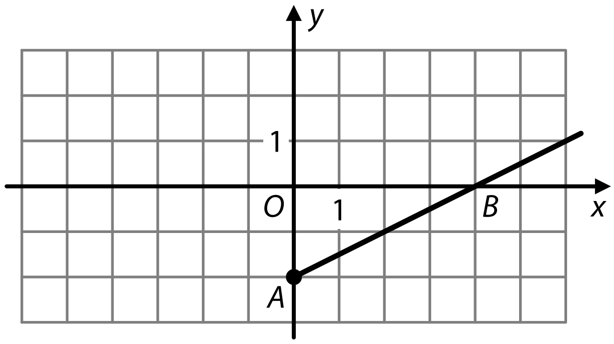
Závěr:

$$x \in \{-6; -2\}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je zakreslena polopřímka *AB*, která představuje **část** grafu **sudé** funkce g.

Body *A*, *B* jsou mřížové.



max. 2 body

7

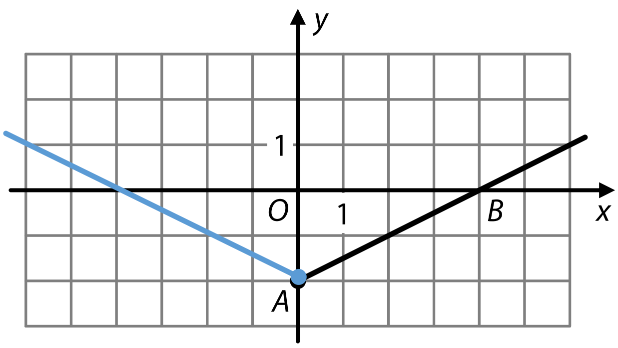
7.1 Zapište předpis funkce g.

Řešení:

$$g : y = \frac{|x|}{2} - 2$$

7.2 V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* sestrojte graf funkce g.

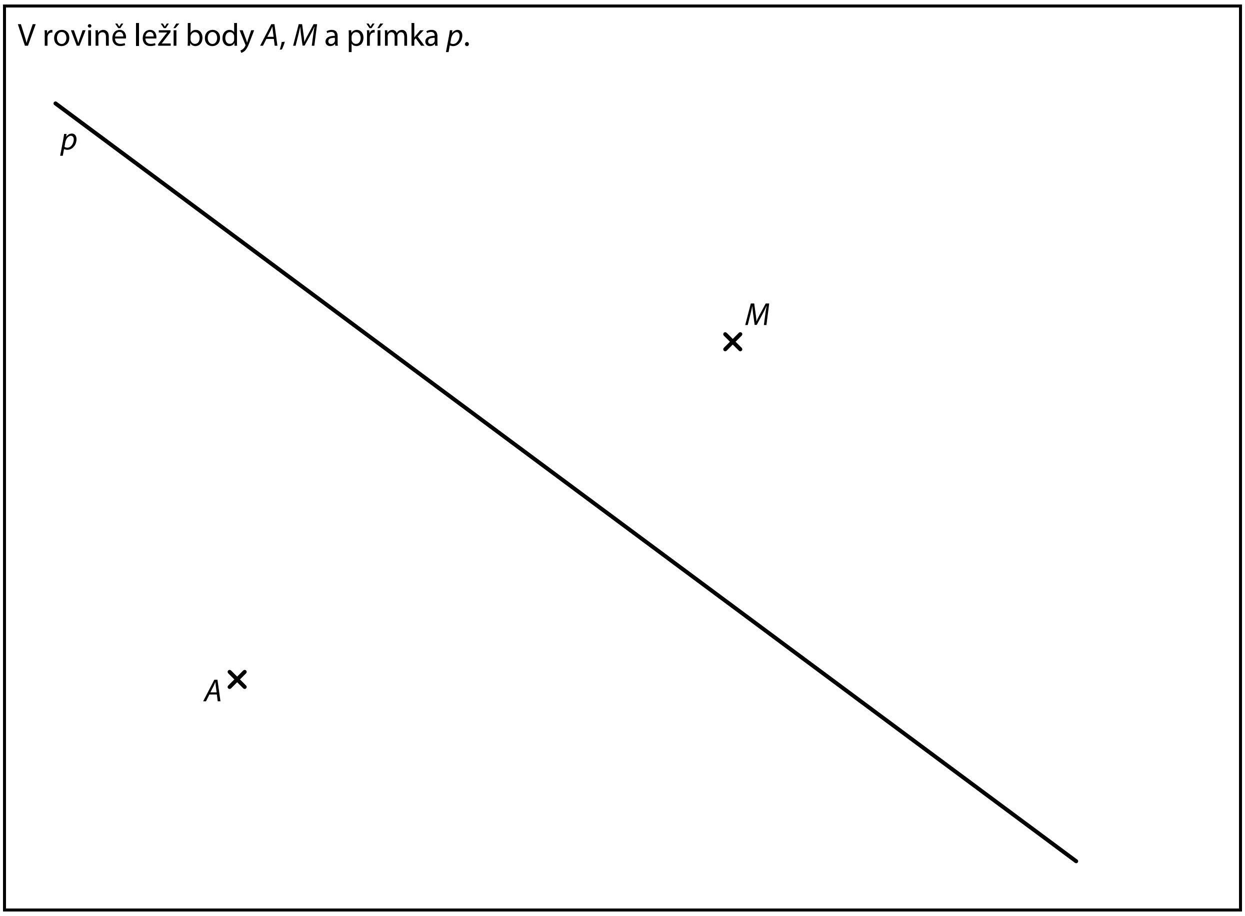
Řešení:



V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině leží body *A*, *M* a přímka *p*.



max. 3 body

8 Bod *A* je vrchol obdélníku *ABCD*.
Na přímce *p* leží úhlopříčka tohoto obdélníku.
Bod *M* leží na hranici obdélníku *ABCD*.

8.1 Hledáme vrcholy *B*, *C*, *D* obdélníku *ABCD*.
Proveďte náčrtek obdélníku *ABCD* a zapište rozbor nebo postup konstrukce.

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy obdélníku *ABCD* a obdélník narýsujte.
Najděte všechna řešení.

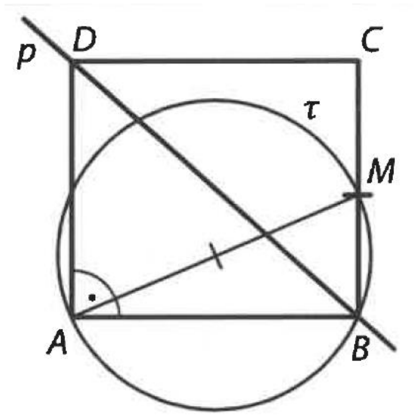
V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

Rozbor:

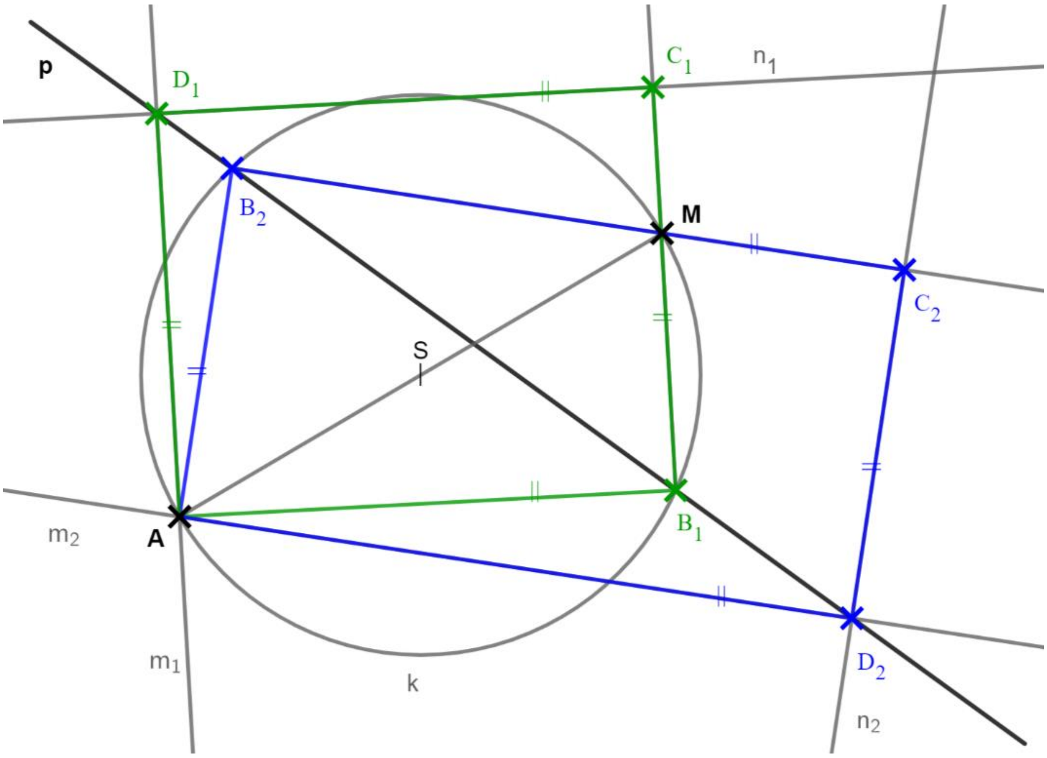
Ze zadání vyplývá:
$BD \subset p, M \in BC \vee M \in CD$
Hledáme bod *B*:
$B \in p \wedge B \in \tau(AM)$
Hledáme body *C*, *D*:
$D \in p \wedge |\sphericalangle BAD| = 90^o$
Bod C je zbývajícím vrcholem obdélníku ABCD

Náčrtek:



Postup konstrukce:

1. $S; S \in AM \wedge |AS| = |SM|$
2. $k; k(S; r = |AS|)$
3. $B; k \cap p = \{B\}$
4. AB
5. $m; A \in m \wedge m \perp AB$
6. $D; m \cap p = \{D\}$
7. $\mapsto BM$
8. $n; D \in n \wedge n \parallel AB$
9. $C; n \cap \mapsto BM = \{C\}$
10. obdélník $ABCD$



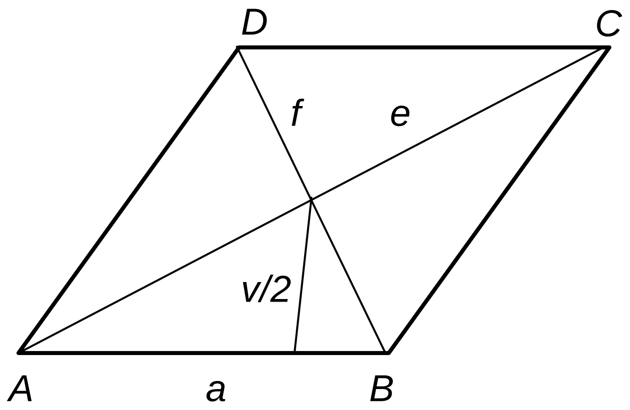
max. 3 body

9 V kosočtverci je poměr délky strany ku velikosti výšky 5 : 3.

Určete poměr délek obou úhlopříček tohoto kosočtverce.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:



$$\frac{a}{v}=\frac{5}{3} \Rightarrow a=\frac{5}{3}v$$

$$S=a\cdot v=\frac{5}{3}v\cdot v=\frac{5}{3}v^2$$

$$S'=4\cdot\frac{\frac{f}{2}\cdot\frac{e}{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot f\cdot e$$

$$S=S'$$

$$\frac{5}{3}v^2=\frac{1}{2}\cdot f\cdot e \Rightarrow e=\frac{10v^2}{3f}$$

$$a^2=\left(\frac{f}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$\frac{25}{9}v^2=\left(\frac{f}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$\frac{25}{9}v^2=\frac{f^2}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{f^2+e^2}{4}$$

$$\frac{100}{9}v^2=f^2+e^2=f^2+\left(\frac{10v^2}{3f}\right)^2$$

$$\frac{100}{9}v^2=f^2+\frac{100v^4}{9f^2}$$

$$100\cdot v^2\cdot f^2=9f^4+100v^4$$

$$9f^4-100\cdot v^2\cdot f^2+100v^4=0$$

$$9f^4-100\cdot v^2\cdot f^2+100v^4=0$$

$$f^2=x$$

$$9x^2-100\cdot v^2\cdot x+100v^4=0$$

$$a=9;\ b=-100v^2;\ c=100v^4$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{100v^2\pm\sqrt{(100v^2)^2-4\cdot 9\cdot 100v^4}}{2\cdot 9}=$$

$$=\frac{100v^2\pm\sqrt{10\,000v^4-3\,600v^2}}{18}=\frac{100v^2\pm\sqrt{6\,400v^4}}{18}=\frac{100v^2\pm 80v^2}{18}$$

$$x_1=10v^2 \quad x_2=\frac{10}{9}v^2$$

$$x_1 = 10v^2 = f_1^2 \quad \Rightarrow \quad f_1 = v \cdot \sqrt{10}$$

$$e_1 = \frac{10v^2}{3f_1} = \frac{10v^2}{3 \cdot v \cdot \sqrt{10}} = \frac{v \cdot \sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{e_1}{f_1} = \frac{\frac{v \cdot \sqrt{10}}{3}}{v \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{10}{9}v^2 = f_2^2 \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{v \cdot \sqrt{10}}{3}$$

$$e_2 = \frac{10v^2}{3f_2} = \frac{10v^2}{3 \cdot \frac{v \cdot \sqrt{10}}{3}} = \frac{10v^2}{v \cdot \sqrt{10}}$$

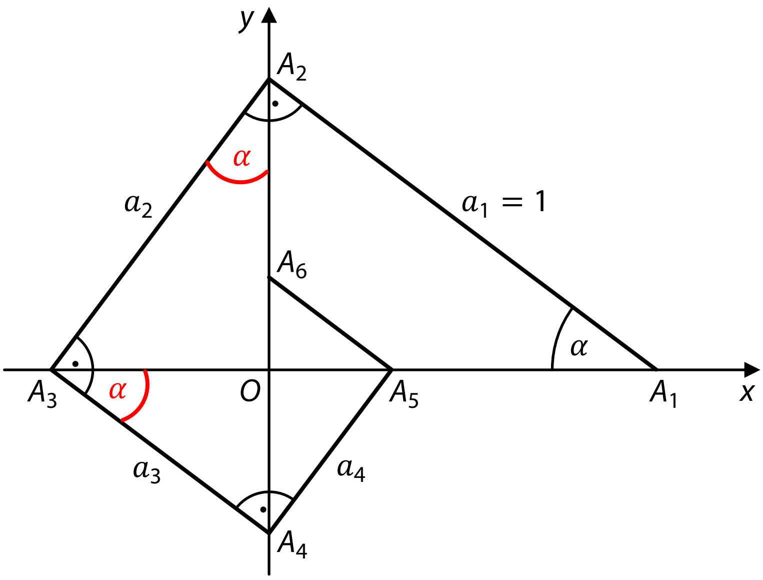
$$e_2 = v \cdot \sqrt{10}$$

$$f_1 = e_2; \; e_1 = f_2$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK ÚLOZE 10

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je na souřadnicových osách umístěno nekonečně mnoho bodů $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ Pro body A_1, A_2 platí: $|A_1A_2| = 1$, $|\sphericalangle A_2A_1O| = \alpha$, kde $0° < \alpha < 45°$. Úhel $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ je pro každé $n \in \mathbf{N}$ pravý.

Pro každé $n \in \mathbf{N}$ označíme a_n vzdálenost bodů A_n, A_{n+1} (tedy $a_1 = |A_1A_2| = 1$).



max. 4 body

10

10.1 **Vyjádřete** vzdálenost a_n v závislosti na $n \in \mathbf{N}$ a velikosti úhlu α.

Řešení:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_2}{a_1} \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_3}{a_2} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1 \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$a_n = a_{n-1} \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad a_n = a_1 \operatorname{tg}^{n-1}\alpha$$

$$a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_n = \operatorname{tg}^{n-1}\alpha$$

10.2 Nekonečná lomená čára $A_1A_2 \dots A_n \dots$ má délku $\ell = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

Pro $\ell = 10$ vypočtěte ve stupních velikost úhlu α.
Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\ell = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = a_1 \cdot (1 + \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + \dots + \mathrm{tg}^{n-1}\alpha + \dots)$$

$q = \mathrm{tg}\alpha \in (0;1) \Rightarrow$ nekonečná geometrická řada konverguje

$$s = \frac{1}{1-q}$$

$$\ell = a_1 \cdot \frac{1}{1-\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{1-\mathrm{tg}\alpha} = 10 \quad \Rightarrow \quad 1 = 10 \cdot (1 - \mathrm{tg}\alpha) = 10 - 10\mathrm{tg}\alpha$$

$$10\mathrm{tg}\alpha = 9 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{9}{10}$$

$$\alpha \doteq 42{,}0^\circ$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Desková hra se hraje vždy na 90 kol a v libovolném z nich může hráč začít s těžbou ropy.

Začne-li hráč těžit ropu v k-tém kole ($k \in \mathbf{N}$, $k \leq 90$), vytěží v tomto kole k barelů ropy.
V každém dalším kole vytěží vždy o k barelů ropy více než v předchozím kole.

Jiným způsobem ve hře těžit ropu nelze.

(Např. hráč, který začne s těžbou ropy v 10. kole, vytěží v 10. kole 10 barelů ropy, v 11. kole pak 20 barelů, ve 12. kole 30 barelů atd.)

max. 4 body

11

11.1 **Vypočtěte**, kolik barelů ropy vytěží za celou hru hráč, který začne s těžbou v 85. kole.

Řešení:

kolo	barelů	barelů celkem	
85.	85	85	85
86.	85 + 85	170	$2 \cdot 85$
87.	170 + 85	255	$3 \cdot 85$
88.	255 + 85	340	$4 \cdot 85$
89.	340 + 85	425	$5 \cdot 85$
90.	425 + 85	510	$6 \cdot 85$
barelů celkem		1 785	$85 \cdot (1+2+3+4+5+6)$ $85 \cdot 21$

11.2 **Vyjádřete** v závislosti na k, kolik barelů ropy vytěží za celou hru hráč, který začne s těžbou v k-tém kole.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

kolo	barelů	barelů celkem
k	k	k
$(k+1)$	$k+k$	$2\cdot k$
$(k+2)$	$2\cdot k+k=k\,(2+1)$	$3\cdot k$
90.	$k\,(90-k+1)$	$(91-k)\cdot k$
barelů celkem		

$$k+2k+3k+\ldots+k\cdot(91-k)=k\cdot\left[1+2+3+\ldots+(91-k)\right]=$$

$$=k\cdot\frac{(91-k)+1}{2}\cdot(91-k)=\frac{k\cdot(92-k)\cdot(91-k)}{2}$$

11.3 Dva hráči začali s těžbou ropy ve dvou po sobě jdoucích kolech hry, přitom oba vytěžili za celou hru stejný počet barelů ropy.

Vypočtěte, kolik barelů ropy vytěžil jeden z těchto dvou hráčů.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$k\cdot(92-k)\cdot(91-k)=(k+1)\cdot\left[92-(k+1)\right]\cdot\left[91-(k+1)\right]$$

$$k\cdot(92-k)\cdot(91-k)=(k+1)\cdot(91-k)\cdot(90-k)$$

$$k\cdot(92-k)=(k+1)\cdot(90-k)$$

$$92k-k^2=90+89k-k^2$$

$$92k=90+89k$$

$$3k=90$$

$$k=30$$

Jednalo se o 30. a 31. kolo.

$$\frac{k\cdot(92-k)\cdot(91-k)}{2}=\frac{30\cdot(92-30)\cdot(91-30)}{2}=\frac{30\cdot 62\cdot 61}{2}=56\,730$$

max. 3 body

12 Každá funkce daná některým z následujících předpisů je definována pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$.

Přiřaďte ke každému předpisu funkce (12.1–12.3) obor hodnot této funkce (A–F).

12.1 $y = -x^2 + 3$ D

12.2 $y = -x^{-3} + 3$ E

12.3 $y = x^{-4} + 3$ A

A) $(3; +\infty)$ **12.3**

B) $\langle 3; +\infty)$

C) $(-\infty; 3)$

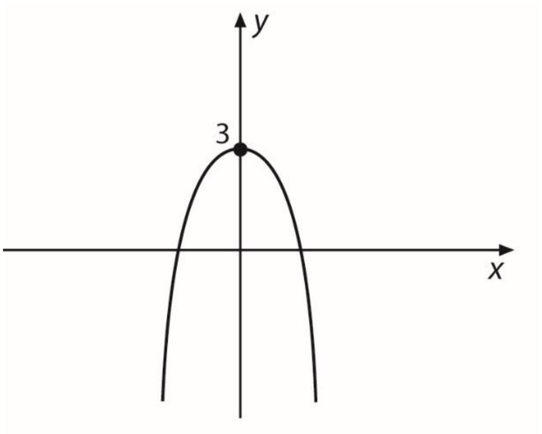
D) $(-\infty; 3\rangle$ **12.1**

E) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ **12.2**

F) R

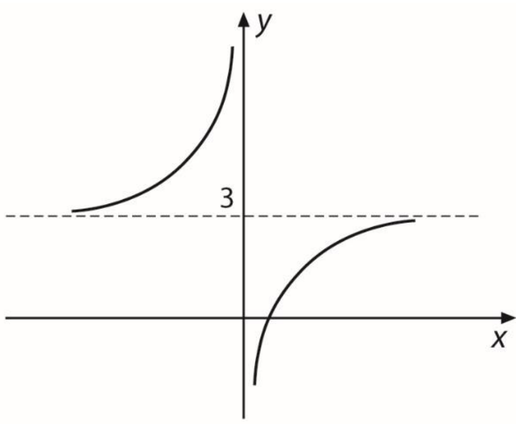
12.1 $y = -x^2 + 3$

Řešení:



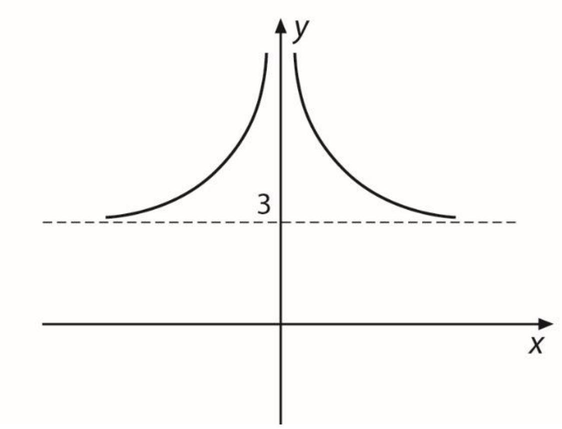
12.2 $y = -x^{-3} + 3$

Řešení:



12.3 $y = x^{-4} + 3$

Řešení:



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V osudí je 12 stejných míčků, každý je označen právě jedním celým číslem. Žádné dva míčky nejsou označeny stejným číslem.

Z osudí táhneme tři čísla, tj. postupně po jednom vylosujeme tři míčky, které nevracíme zpět.

max. 3 body

13 Přiřaďte ke každému jevu (13.1–13.3) pravděpodobnost (A–F), s níž jev nastane.

13.1 Mezi taženými čísly je nejmenší číslo z osudí. **C**

13.2 Druhé tažené číslo je větší než první a zároveň menší než třetí tažené číslo. **D**

13.3 Třetí tažené číslo je nejmenší nebo největší z tažených čísel. **A**

A) $\frac{2}{3}$ **13.3**

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$ **13.1**

D) $\frac{1}{6}$ **13.2**

E) $\frac{1}{12}$

F) jiná hodnota pravděpodobnosti

13.1 Mezi taženými čísly je nejmenší číslo z osudí.

Řešení:

$$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{11}{2}}{\binom{12}{3}}=\frac{\frac{11\cdot 10}{2}}{\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3!}{12}=\frac{1}{4}$$

13.2 Druhé tažené číslo je větší než první a zároveň menší než třetí tažené číslo.

Řešení:

Tažená čísla lze uspořádat 3! možnostmi, přičemž jediná z nich vyhovuje daným podmínkám.

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

13.3 Třetí tažené číslo je nejmenší nebo největší z tažených čísel.

Řešení:

Pravděpodobnost, že nastane první nebo druhý jev:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je dán bod $P[-4; 3]$ a přímka o: $y = 0{,}25x$.
Bodem *P* prochází přímka *p*, která je obrazem sebe sama v osové souměrnosti s osou *o*.

2 body

14 Která rovnice je rovnicí přímky *p*?

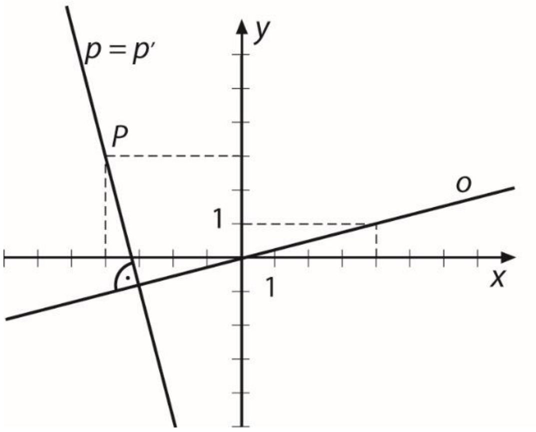
A) $y = -0{,}25x + 2$

B) $y = -4x - 13$

C) $y = 0{,}25x + 4$

D) $y = 4x + 19$

E) žádná z uvedených



Řešení:

$o: y = \dfrac{x}{4}$

$o: 4y = x$

$0 = x - 4y$

$\vec{n}_o = (1; -4) \Rightarrow \vec{n}_p = (4; 1)$

$p: 4x + y + c = 0$

$P \in p: 4 \cdot (-4) + 3 + c = 0$

$c = 13 \Rightarrow p: 4x + y + 13 = 0 \Rightarrow p: y = -4x - 13$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou dány body $M[4; -1]$, $N[8; 5]$.
Bod *Y* leží na souřadnicové ose *y* a od obou bodů *M*, *N* má stejnou vzdálenost.

2 body

15 Jaký je obsah trojúhelníku *MNY*?

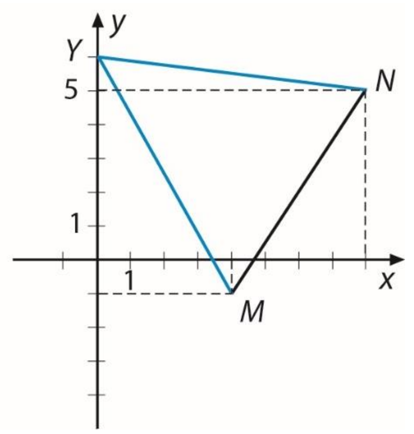
A) 26

B) $\sqrt{793}$

C) 29

D) $6\sqrt{26}$

E) jiný obsah



Řešení:

$Y = [0; y]$

$\overrightarrow{MY} = (-4; y + 1)$; $\overrightarrow{NY} = (-8; y - 5)$

$|MY| = |NY|$

$16 + (y + 1)^2 = 64 + (y - 5)^2$

$16 + y^2 + 2y + 1 = 64 + y^2 - 10y + 25$

$12y = 72$

$y = 6$

$\overrightarrow{MN}(4; 6) \rightarrow (2; 3)$ $\vec{n}(3; -2)$

$$3x - 2y + c = 0$$
$$12 + 2 + c = 0$$
$$c = -14$$
$$3x - 2y - 14 = 0$$

$$v(Y; MN) = \frac{3 \cdot 0 - 2 \cdot 6 - 14}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}}$$

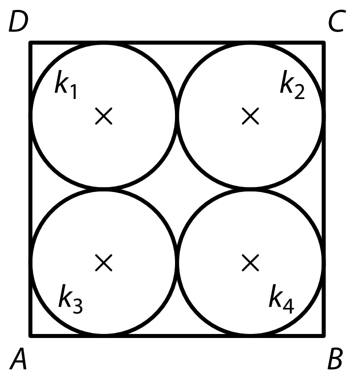
$$|MN| = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13}$$

$$S = \frac{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{26}{\sqrt{13}}}{2} = 26$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 16

Ve čtverci *ABCD* jsou zakresleny čtyři shodné kružnice k_1–k_4 jako na obrázku. Každá kružnice se dotýká dvou stran čtverce a dvou kružnic.

Čtverec *ABCD* je umístěn v kartézské soustavě souřadnic *Oxy* tak, že platí: $B[5; -2]$, $D[-3; 6]$.



2 body

16 Jaká je rovnice kružnice k_1?

A) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

B) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$

E) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$

Řešení:

$$\overrightarrow{BD} = (-8; 8)$$
$$\left|\overrightarrow{BD}\right| = 8 \cdot \sqrt{2}$$

$$|BD|^2 = a^2 + a^2$$
$$|BD| = a \cdot \sqrt{2}$$

$$8 \cdot \sqrt{2} = a \cdot \sqrt{2}$$

$$8 = a$$

r – poloměr kružnice

$$r = \frac{a}{4} = 2$$

$S[-3+2; 6-2] \quad \Rightarrow \quad S[-1; 4]$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 4$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 - 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Během II. pololetí si oproti I. pololetí tři žáci třídy zlepšili výslednou známku z fyziky o 1 stupeň a dva žáci dokonce o 2 stupně. Ostatní žáci měli z fyziky v I. i ve II. pololetí stejnou známku. Aritmetický průměr výsledných známek z fyziky se tak ve třídě na konci II. pololetí změnil oproti I. pololetí o čtvrt stupně.

2 body

17 Kolik žáků třídy dostalo na konci II. pololetí známku z fyziky?

A) 20 žáků

B) 24 žáků

C) 28 žáků

D) 32 žáků

E) jiný počet žáků

Řešení:

x – součet známek v 1. pololetí

y – součet známek v 2. pololetí

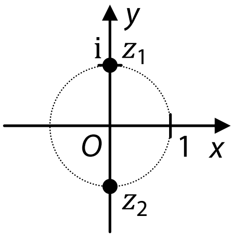
$$\frac{x}{n} = \frac{y}{n} + \frac{1}{4} \qquad y = x - 7$$
$$\frac{x}{n} = \frac{x-7}{n} + \frac{1}{4}$$
$$4x = 4x - 28 + n$$
$$n = 28$$

2 body

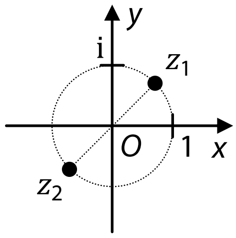
18 Na jednom z následujících obrázků (A–E) jsou v Gaussově rovině zakresleny obrazy komplexních čísel z_1, z_2, která jsou kořeny rovnice $z^2 = -\mathrm{i}$.

Na kterém obrázku jsou zakresleny obrazy obou kořenů?

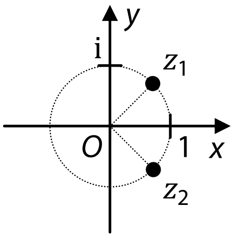
A)



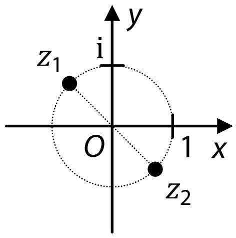
B)



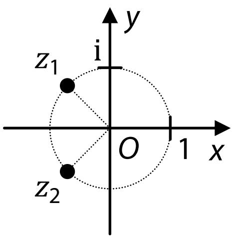
C)



D)



E)



Řešení:

$z = -i \quad \rightarrow$ převod na goniometrický tvar

$$z = \cos\frac{3}{2}\pi + i\cdot\sin\frac{3}{2}\pi$$

$$z_k = \sqrt[k]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{k} + i\cdot\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{k}\right)$$

$$k = 0:\; z_1 = \cos\frac{3}{4}\pi + i\cdot\sin\frac{3}{4}\pi$$

$$k = 1:\; z_2 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\cdot\sin\frac{7}{4}\pi$$

2 body

19 Pro kterou z následujících soustav nerovnic je množinou všech řešení v oboru R prázdná množina?

A) $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$

B) $x^2 - 4x + 4 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 \leq 0$

C) $(x+5)^2 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$

D) $x^2 + 4 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 \leq 0$

E) $x^2 - 4 > 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$

Řešení:

A) $\langle 2; 3 \rangle$

B) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

$(x-2)^2 \leq 0 \qquad x^2 \leq 0$

splňuje 2 *splňuje* 0

C) $\{-5\}$

D) $\{0\}$

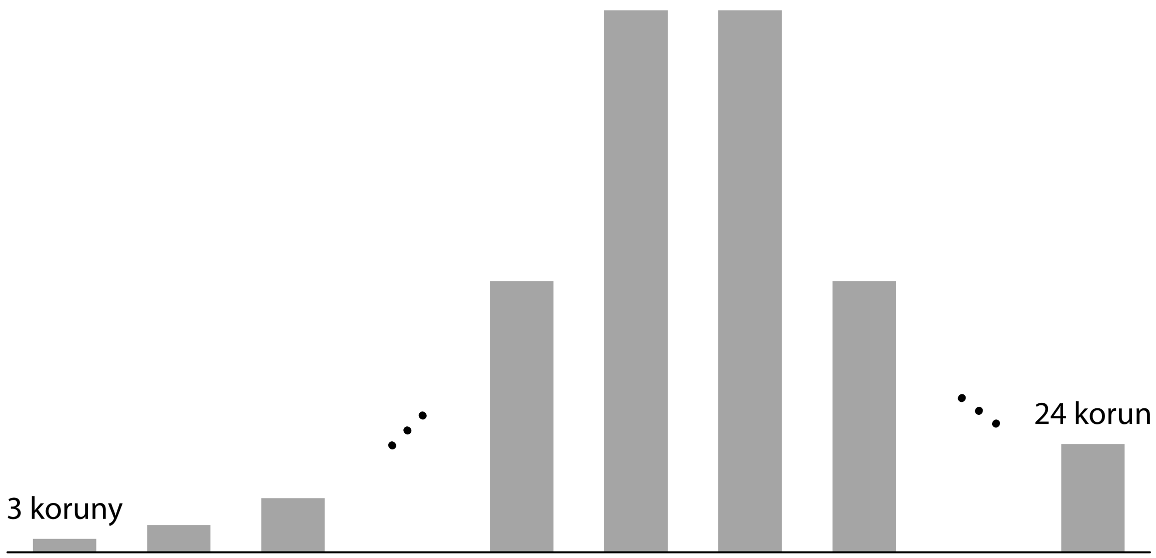
E) $(-2; 0) \cup (0; 2)$

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 20

Novomanželé poprosili svatební hosty, aby jim při příchodu na hostinu přispěli do kasičky.

První host vhodil do prázdné kasičky 3 koruny. Každý další host dal do kasičky dvojnásobek předchozího příspěvku, dokud jeden host neusoudil, že by se kasička mohla brzy přeplnit. Tento host přispěl stejnou částkou jako host před ním a každý další host pak do kasičky dal polovinu předchozího příspěvku. Poslední host přispěl 24 korunami.

Svatební hosté tak vhodili novomanželům do kasičky celkem 12 261 korun.



V grafu je naznačeno, jakými částkami hosté postupně novomanželům přispívali do kasičky.

2 body

20 Kolik svatebních hostů přispělo novomanželům do kasičky?

A) 18 hostů

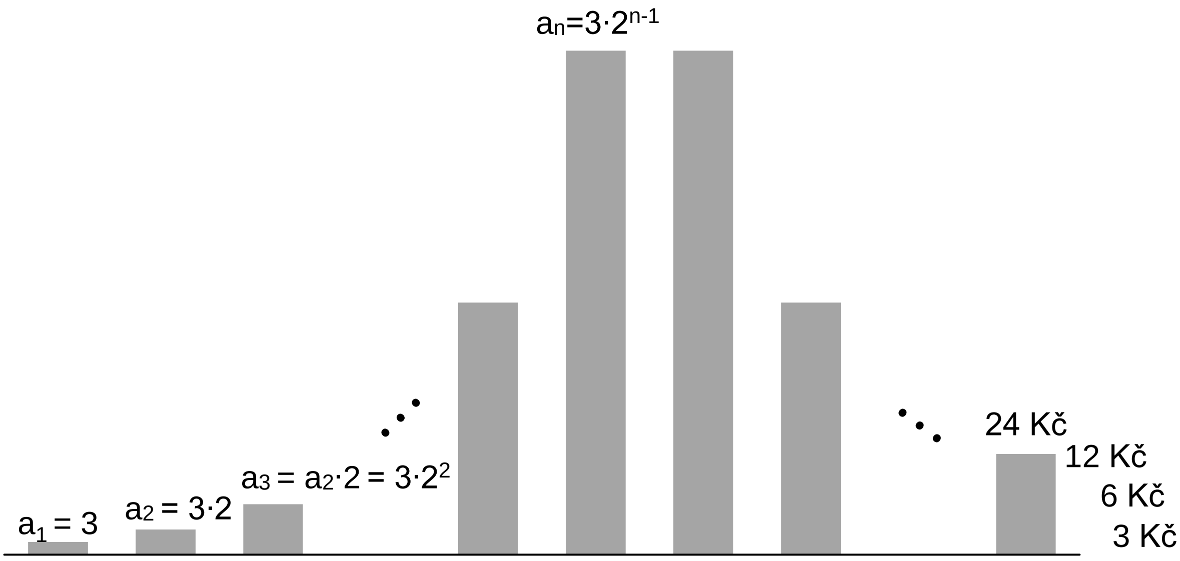
B) 19 hostů

C) 20 hostů

D) 21 hostů

E) jiný počet hostů

Řešení:



počet hostů: $2n - 3$

$$2(a_1 + ... + a_n) = 12261 + 12 + 6 + 3$$

$$2(3 + ... + 3 \cdot 2^{n-1}) = 12282$$

$$6(1 + ... + 2^{n-1}) = 6 \cdot 2047$$

$$\frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2047$$

$$1 - 2^n = -2047$$

$$2048 = 2^n$$

$$2^{11} = 2^n$$

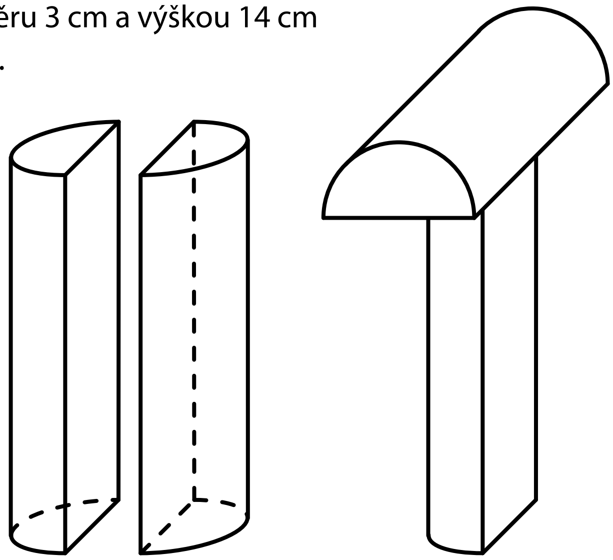
$$n = 11$$

$\Rightarrow$ počet hostů: $2n - 3 = 19$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Dřevěný rotační válec s podstavou o poloměru 3 cm a výškou 14 cm byl osovým řezem rozdělen na dva půlválce.

Jeden z půlválců byl celou plochou horní podstavy přilepen k ploše řezu druhého půlválce (viz obrázek).



2 body

21 Jaký je povrch slepeného tělesa?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2.

A) 376 cm^2

B) 396 cm^2

C) 460 cm^2

D) 474 cm^2

E) jiný povrch

Řešení:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + \pi \cdot r^2 + 2 \cdot d \cdot v$$

$$S = \pi \cdot \left(2 \cdot r \cdot v + r^2\right) + 2 \cdot d \cdot v$$

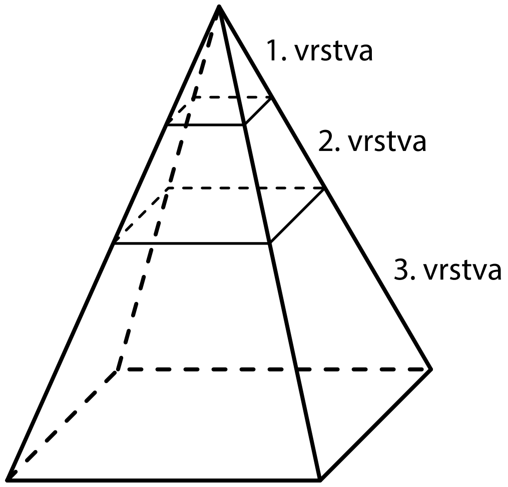
$$S = \pi \cdot \left(6 \cdot 14 + 9\right) + 2 \cdot 6 \cdot 14$$

$$S \doteq 460 \text{ cm}^2$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Svíčka tvaru jehlanu se skládá ze tří vrstev s rovnoběžnými podstavami (viz obrázek).

Výška 2. vrstvy je stejná jako výška 1. vrstvy a výška 3. vrstvy je dvakrát větší než výška 1. vrstvy.



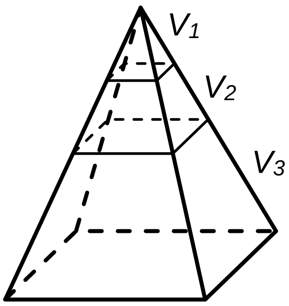
max. 3 body

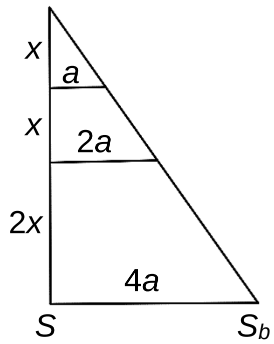
22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
22.1	Poměr objemu 1. vrstvy ku objemu celé svíčky je 1 : 64.	☒	☐
22.2	Poměr objemu 1. vrstvy ku objemu 2. vrstvy je 1 : 8.	☐	☒
22.3	Poměr objemu 2. vrstvy ku objemu 3. vrstvy je 1 : 8.	☒	☐

Řešení:

Objem vrstev:





S je střed podstavy, S_b je střed hrany podstavy $b = 8a$.

$$V_1 = \frac{1}{3}S_p \cdot v = \frac{1}{3}\cdot(2a)^2 \cdot x = \frac{4}{3}a^2x$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot(4a)^2 \cdot 2x - \frac{4}{3}a^2x = \left(\frac{32}{2} - \frac{4}{3}\right)a^2x = \frac{28}{3}a^2x$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\cdot(8a)^2 \cdot 4x - \frac{28}{3}a^2x - \frac{4}{3}a^2x = \frac{(256-28-4)}{3}a^2x = \frac{224}{3}a^2x$$

Celá svíčka:

$$V = \frac{1}{3}\cdot(8a)^2 \cdot 4x = \frac{4\cdot 64}{3}a^2x$$

$$V_1 : V = 1:64;\ V_1 : V_2 = 4:28 = 1:7;\ V_2 : V_3 = 28:224 = 1:8$$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.