cermat

MATEMATIKA

MAMZD22C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

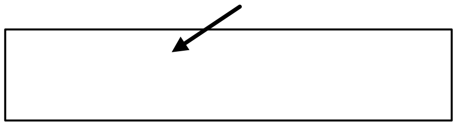
- **Didaktický test** obsahuje **25 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- První část didaktického testu (úlohy 1–14) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 15–25) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.

1


- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.

A B C D E
17


- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.

A B C D E
17


- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 Je dán interval A a množina B:

A $= \langle -5; 5)$

B $= \{x \in \mathbf{R}; -8 \leq x < 3\}$

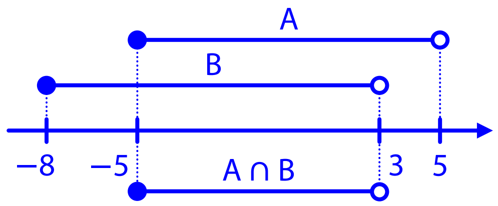
Určete A ∩ B**.**

Řešení:

A $= \langle -5; 5)$

B $= \langle -8; 3)$

A ∩ B $= \boldsymbol{\langle -5; 3)}$



---

1 bod

2 **Pro** $n \in$ **N upravte na mocninu o základu** 4**.**

$$4 \cdot \frac{16^{3n}}{4^{2n+1}} =$$

Řešení:

$$4 \cdot \frac{16^{3n}}{4^{2n+1}} = 4 \cdot \frac{\left(4^2\right)^{3n}}{4^{2n+1}} = \frac{4 \cdot 4^{2 \cdot 3n}}{4^{2n} \cdot 4^1} = \frac{4^{6n}}{4^{2n}} = 4^{6n-2n} = \mathbf{4^{4n}}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Pouze pětina vyprodukovaných PET lahví se **nevytřídí**.
Z vytříděných PET lahví se 70 % recykluje.
(Nevytříděné lahve se nerecyklují.)

(CZVV)

1 bod

3 **Vypočtěte, kolik procent vyprodukovaných PET lahví se recykluje.**

Řešení:

Množství vyprodukovaných PET lahví označíme p.

Množství vytříděných PET lahví: $p - \frac{p}{5} = 0{,}8p$

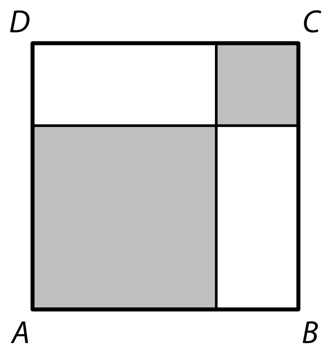
Množství recyklovaných PET lahví: $0{,}7 \cdot 0{,}8p = 0{,}56p$

Recykluje se **56 %** vyprodukovaných PET lahví.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Čtverec *ABCD* je dvěma úsečkami rozdělen na dva menší tmavé čtverce a dva shodné bílé obdélníky.

Obvod jednoho bílého obdélníku je 22 cm.



(*CZVV*)

1 bod

4 Vypočtěte v cm^2 obsah čtverce *ABCD*.

Řešení:

Rozměry bílého obdélníku označíme x, y, jeho obvod o.

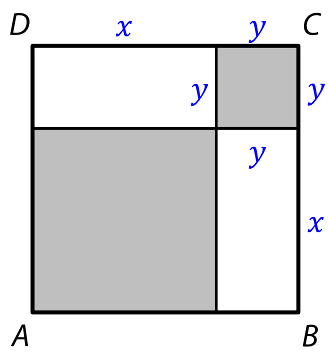
Platí: $o = 2(x + y)$, $o = 22$ cm

Oba bílé obdélníky jsou shodné, délka strany čtverce *ABCD* je tedy $a = x + y$.

Obsah čtverce *ABCD*:

$S = a^2$, $a = x + y = \frac{o}{2}$

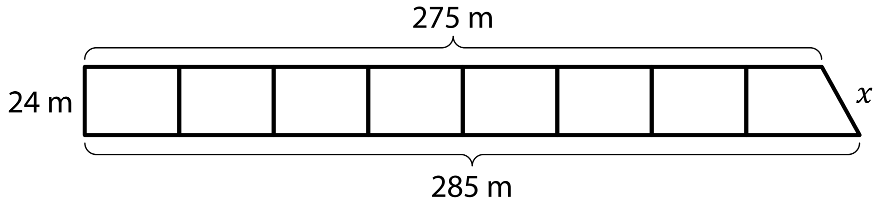
$S = \left(\frac{o}{2}\right)^2 = \left(\frac{22\text{ cm}}{2}\right)^2 =$ **121 cm^2**



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Pozemek má tvar pravoúhlého lichoběžníku s výškou 24 m a základnami délek 285 m a 275 m.

Pozemek je rozdělen na **8 parcel** o stejné výměře. Prvních sedm parcel tvoří shodné obdélníky, poslední parcela má tvar pravoúhlého lichoběžníku.



(*CZVV*)

max. 3 body

5 Vypočtěte

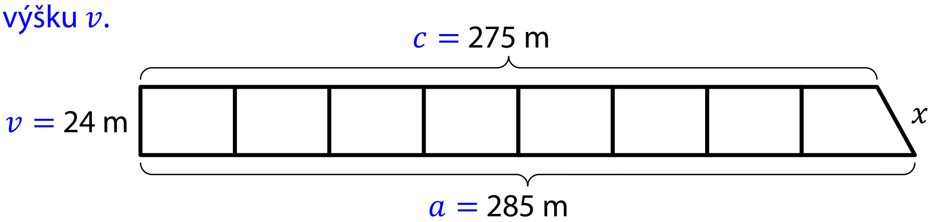
5.1 v m^2 výměru jedné parcely,

5.2 v m chybějící délku x strany pozemku,

5.3 v m obvod **poslední** parcely.

Řešení:

V pravoúhlém lichoběžníku, který představuje celý pozemek, označíme délky základen a, c a výšku v.



Platí:

$a = 285$ m, $c = 275$ m, $v = 24$ m

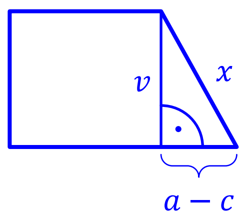
5.1 Výměry všech osmi parcel jsou stejné, výměra S_1 jedné parcely je tedy osminou výměry S celého pozemku:

$$S_1 = \frac{1}{8}S, \qquad S = \frac{a+c}{2}\cdot v$$

$$S_1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{a+c}{2}\cdot v = \frac{a+c}{16}\cdot v = \frac{285\text{ m} + 275\text{ m}}{16}\cdot 24\text{ m} = \mathbf{840\ m^2}$$

5.2 Pravoúhlý lichoběžník, který představuje poslední parcelu, rozdělíme výškou na obdélník a pravoúhlý trojúhelník.

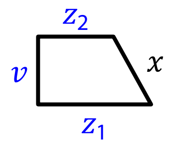
Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku mají délky v a $a-c$.
Pro délku x přepony platí:



$$x^2 = v^2 + (a-c)^2$$

$$x = \sqrt{v^2 + (a-c)^2} = \sqrt{24^2 + (285-275)^2}\text{ m} = \mathbf{26\ m}$$

5.3 V pravoúhlém lichoběžníku, který představuje poslední parcelu, označíme délky základen z_1, z_2.
Ramena tohoto lichoběžníku mají délky v a x.



Platí: $v = 24$ m, $x = 26$ m (viz řešení úlohy 5.2)

Obvod lichoběžníku je součtem délek všech jeho stran.
Abychom zjistili součet délek základen $(z_1 + z_2)$, můžeme vyjít z obsahu lichoběžníku, který je roven výměře jedné parcely (viz řešení úlohy 5.1):

$$S_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v = \frac{1}{8} \cdot \frac{a + c}{2} \cdot v$$

$$\frac{z_1 + z_2}{2} \cdot v = \frac{1}{8} \cdot \frac{a + c}{2} \cdot v$$

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{8}(a + c)$$

Obvod poslední parcely:

$$o = z_1 + z_2 + v + x$$

$$o = \frac{1}{8}(a + c) + v + x = \frac{1}{8}(285\text{ m} + 275\text{ m}) + 24\text{ m} + 26\text{ m} = \mathbf{120\text{ m}}$$

případně

Z výměry jedné parcely (viz řešení úlohy 5.1) vypočteme šířku s obdélníkové parcely:

$S_1 = s \cdot v$, $\quad S_1 = 840\text{ m}^2$, $\quad v = 24$ m

$$s = \frac{S_1}{v} = \frac{840\text{ m}^2}{24\text{ m}} = 35\text{ m}$$

Délky základen poslední parcely získáme odečtením sedmi těchto šířek od délek základen celého pozemku.

$$z_1 = a - 7s = 285\text{ m} - 7 \cdot 35\text{ m} = 40\text{ m}$$

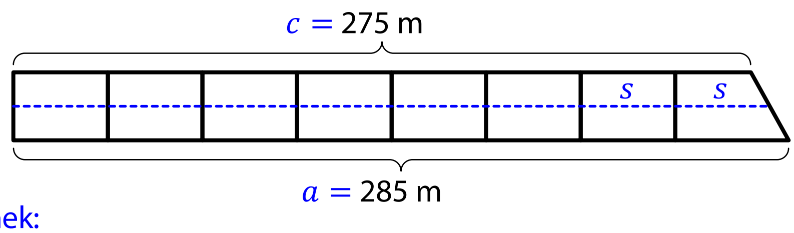
$$z_2 = c - 7s = 275\text{ m} - 7 \cdot 35\text{ m} = 30\text{ m}$$

Obvod poslední parcely:

$$o = z_1 + z_2 + v + x = 40\text{ m} + 30\text{ m} + 24\text{ m} + 26\text{ m} = \mathbf{120\text{ m}}$$

případně

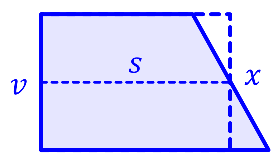
Šířka s obdélníkové parcely je osminou délky střední příčky lichoběžníku, který představuje celý pozemek:



$$s = \frac{1}{8} \cdot \frac{a + c}{2} = \frac{285\text{ m} + 275\text{ m}}{16} = 35\text{ m}$$

Obvod o_1 obdélníkové parcely a obvod o poslední parcely se liší pouze o rozdíl délek $(x - v)$:

$o - o_1 = x - v$, $\quad x = 26$ m, $\quad v = 24$ m



Obvod poslední parcely:

$o = o_1 + x - v$, $\quad o_1 = 2s + 2v$

$$o = 2s + 2v + x - v$$

$$o = 2s + v + x = 2 \cdot 35\text{ m} + 24\text{ m} + 26\text{ m} = \mathbf{120\text{ m}}$$

max. 2 body

6 **Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ zjednodušte:**

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 - 3x}\right) : \frac{1}{x^2 - 9} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 - 3x}\right) : \frac{1}{x^2 - 9} = \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x(x-3)}\right) \cdot \frac{x^2 - 9}{1} = \frac{x - 3 + 3}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{1} =$$
$$\frac{x}{x} \cdot \frac{x+3}{1} = x + 3$$

---

max. 2 body

7 **V oboru R řešte:**

$$\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{16}{x^2 + 2x} = \frac{x}{x+2}$$

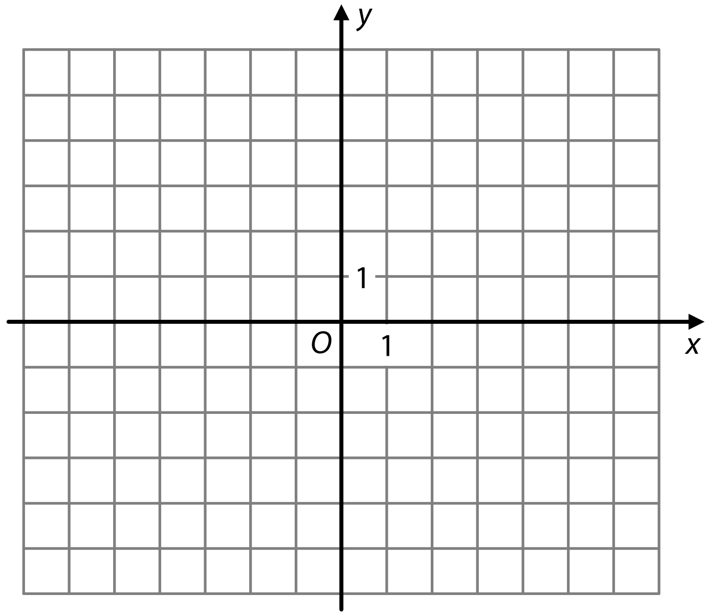
V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{16}{x^2 + 2x} = \frac{x}{x+2}$$
$$\frac{3x - 6}{x(x+2)} + \frac{16}{x(x+2)} = \frac{x}{x+2}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0\}$$
$$\frac{3x + 10}{x(x+2)} = \frac{x}{x+2} \quad \Big| \cdot x(x+2)$$
$$3x + 10 = x^2$$
$$0 = x^2 - 3x - 10$$
$$0 = (x-5)(x+2)$$
$$x_1 = 5, \qquad x_2 = -2$$
$$\mathrm{K} = \{5\}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Funkce $f\colon y = \dfrac{3}{x-1}$ je definována pro všechna přípustná $x \in \mathbf{R}$.



(CZVV)

max. 2 body

8

8.1 Určete obě souřadnice průsečíku $P[p_1; p_2]$ grafu funkce f se souřadnicovou osou y.

Řešení:

$p_1 = 0, \qquad p_2 = f(0) = \dfrac{3}{0-1} = -3$

***P*[0; −3]**

8.2 V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* sestrojte graf funkce f.
Na grafu funkce vyznačte alespoň tři mřížové body.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

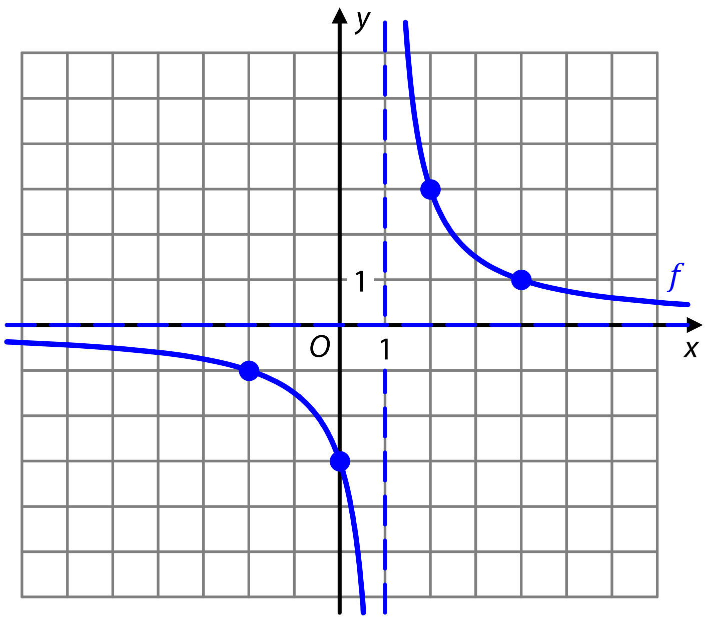
Graf funkce f získáme posunutím grafu nepřímé úměrnosti

$f_1\colon y = \dfrac{3}{x}$

o 1 jednotku ve směru kladné poloosy *x*.

Graf funkce f prochází čtyřmi mřížovými body:

$[-2; -1]$, $[0; -3]$, $[2; 3]$ a $[4; 1]$

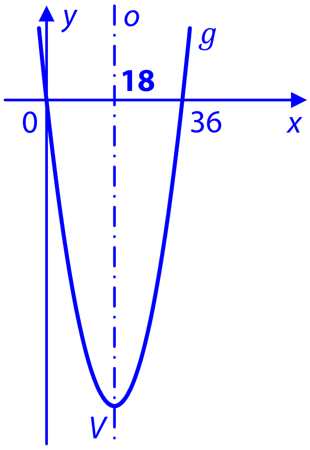


1 bod

9 Funkce $g: y = x(x - 36)$ je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$.
Vrcholem grafu funkce g je bod $V[v_1; v_2]$.

Určete první souřadnici v_1 vrcholu V.

Řešení:



$g: y = x(x - 36) = x^2 - 36x$

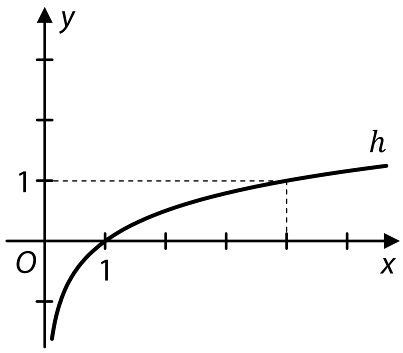
Funkce g je kvadratická funkce, jejím grafem je parabola.
Graf protíná souřadnicovou osu x v bodech $X_1[0; 0]$, $X_2[36; 0]$ a je souměrný podle osy o kolmé na souřadnicovou osu x.

Vrchol V paraboly leží na ose souměrnosti o. Body X_1, X_2 jsou podle této osy souměrně sdružené.
První (x-ovou) souřadnici vrcholu V můžeme vypočítat jako aritmetický průměr x-ových souřadnic bodů X_1, X_2:

$$v_1 = \frac{0 + 36}{2} = \mathbf{18}$$

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 10

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf logaritmické funkce $h: y = \log_a x$, jejímž definičním oborem je interval $(0; +\infty)$.



(CZVV)

max. 2 body

10 **Určete**

10.1 základ a logaritmické funkce h,

Řešení:

Graf funkce h prochází bodem $[4; 1]$, tedy platí $h(4) = 1$:

$1 = \log_a 4 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = 4$

$\boldsymbol{a = 4}$

10.2 hodnotu proměnné x, pro kterou $h(x) = 3$.

Řešení:

Použijeme základ $a = 4$ logaritmické funkce h vypočtený v úloze 10.1.

Hledáme $x \in (0; +\infty)$, pro které platí:

$3 = \log_4 x \quad \Leftrightarrow \quad 4^3 = x$

$\boldsymbol{x = 64}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZKY K ÚLOZE 11

Pás obsahuje devět po sobě jdoucích číslic od 1 do 9:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Zakrytím tří číslic vytvoříme šestimístné číslo, např.:

345 678			3	4	5	6	7	8	
134 679	1		3	4		6	7		9
156 789	1				5	6	7	8	9

(*CZVV*)

max. 2 body

11 Vypočtěte,

11.1 kolik různých šestimístných čísel lze takto vytvořit,

Řešení:

Počet všech možností, jak zakrýt 3 číslice z devíti: $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{84}$

11.2 kolik z těchto šestimístných čísel má na místě desítek číslici 7.

Řešení:

Hledaná čísla obsahují nezakrytou číslici 7 na místě desítek, za ní proto následuje už jen jedna nezakrytá číslice (na místě jednotek). Tedy z číslic 8 a 9 musí být zakryta právě jedna. Před číslicí 7 budou na pásu zakryty už jen 2 číslice z šesti možných.

Počet všech možností, jak zakrýt 2 pole z šesti (před číslicí 7) a 1 pole ze dvou (za číslicí 7):

$\binom{6}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 2 = \mathbf{30}$

---

max. 2 body

12 V aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 15$ je šedesátý člen $a_{60} = 340$.

Určete

12.1 první člen a_1,

Řešení:

V aritmetické posloupnosti s diferencí d platí pro n-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Konkrétně tedy pro $n = 60$:

$a_{60} = a_1 + 59d$

$a_1 = a_{60} - 59d$

$a_1 = 340 - 59 \cdot 15 = \mathbf{-545}$

12.2 pořadí k nejmenšího kladného členu posloupnosti ($a_k > 0$).

Řešení:

Pro libovolný k-tý člen aritmetické posloupnosti platí: $a_k = a_{60} + (k - 60) \cdot d$

Zadaná posloupnost je rostoucí ($d = 15 > 0$), hledané pořadí k je tedy nejmenší možné přirozené číslo, pro které platí $a_k > 0$:

$$\begin{aligned} a_k &> 0 \\ a_{60} + (k - 60) \cdot d &> 0 \\ 340 + (k - 60) \cdot 15 &> 0 \\ 15k &> 560 \\ k &> 37\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nejmenší $k \in \mathbf{N}$, které splňuje tuto nerovnost, je $\boldsymbol{k = 38}$.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Robůtek se pohybuje po spirále. Nejkratší dobu stráví na prvním oblouku spirály.

Časy strávené na dalších obloucích se postupně prodlužují. Rozdíl časů strávených na kterýchkoli dvou po sobě jdoucích obloucích je konstantní.

První dva oblouky překoná robůtek za 32 sekund, samotný čtvrtý oblouk také za 32 sekund.

(CZVV)

max. 2 body

13 Vypočtěte čas, který robůtek stráví na pátém oblouku.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Časy (v sekundách), které robůtek stráví na jednotlivých obloucích spirály, tvoří aritmetickou posloupnost, v níž platí: $a_1 + a_2 = 32$, $\quad a_4 = 32$

Označíme d diferenci této posloupnosti a vyjádříme: $a_2 = a_1 + d$, $\quad a_4 = a_1 + 3d$

Hledáme pátý člen posloupnosti: $a_5 = a_4 + d$

Sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a_1, d a vypočteme d:

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 + d &= 32 \\ a_1 + 3d &= 32 \\ \hline 2a_1 + d &= 32 \\ 2a_1 + 6d &= 64 \\ \hline 2a_1 + d &= 32 \\ 5d &= 32 \\ \hline 2a_1 + d &= 32 \\ d &= 6{,}4 \end{aligned}$$

$a_5 = a_4 + d = 32 + 6{,}4 = 38{,}4$

Na pátém oblouku spirály stráví robůtek 38,4 sekundy.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Jedna korunová mince váží 3,6 gramu a jedna pětikorunová mince váží 4,8 gramu.

V kasičce jsou pouze korunové a pětikorunové mince. Dohromady mají hodnotu 81 korun a váží 120 gramů.

(*CZVV*)

max. 3 body

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtěte celkový počet mincí v kasičce.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

Počet korunových mincí v kasičce označíme k a počet pětikorunových mincí p.

Podle zadání sestavíme dvě rovnice o dvou neznámých a soustavu vyřešíme:

hodnoty mincí: $k + 5p = 81$

hmotnosti mincí: $3{,}6k + 4{,}8p = 120$

$$3k + 15p = 243$$
$$3k + 4p = 100$$

$$k + 5p = 81$$
$$11p = 143$$

$$k + 5p = 81$$
$$p = 13$$

$$k = 81 - 5 \cdot 13 = 16$$
$$p = 13$$

Celkový počet mincí: $k + p = 16 + 13 = 29$

V kasičce bylo celkem 29 mincí.

max. 3 body

15 K je přirozené číslo ($K \in \mathbf{N}$),
M je o 4 větší než K,
P je aritmetický průměr K a M.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
15.1	Pro každé $K \in \mathbf{N}$ je číslo M sudé.	☐	☒
15.2	Pro každé $K \in \mathbf{N}$ je součet $K + M$ dvakrát větší než P.	☒	☐
15.3	Pro každé $K \in \mathbf{N}$ je součet $K + M$ větší než $2P$.	☐	☒

Řešení:

15.1 Je-li K liché, také $M = K + 4$ je liché.

Tvrzení 15.1 je **nepravdivé**.

15.2 Aritmetický průměr čísel K a M:

$$P = \frac{K + M}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot P = K + M$$

Tvrzení 15.2 je **pravdivé**.

15.3 Protože součet $K + M$ je roven $2P$, nerovnost $K + M > 2P$ neplatí.

Tvrzení 15.3 je **nepravdivé**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Letadlem do Bruselu cestovaly pouze dospělé osoby. Mezi cestujícími bylo o třetinu více žen než mužů. Každý cestující měl pouze jedno zavazadlo.

Zavazadla všech cestujících byla zvážena: aritmetický průměr hmotností zavazadel žen byl 18,30 kg a zavazadel mužů 14,80 kg.

(CZVV)

2 body

16 **Jaký byl aritmetický průměr hmotností zavazadel všech cestujících v letadle?**

A) 16,30 kg

B) 16,55 kg

C) 16,80 kg

D) 16,90 kg

E) jiná hmotnost

Řešení:

Poměr počtu žen ku počtu mužů cestujících v letadle byl 4 : 3.
Průměrná hmotnost zavazadel žen byla $\overline{m_z} = 18{,}30$ kg a mužů $\overline{m_m} = 14{,}80$ kg.

Vážený aritmetický průměr hmotností zavazadel všech cestujících:

$$\overline{m} = \frac{4 \cdot \overline{m_z} + 3 \cdot \overline{m_m}}{4 + 3} = \frac{4 \cdot 18{,}30\ \text{kg} + 3 \cdot 14{,}80\ \text{kg}}{7} = 16{,}80\ \text{kg}$$

2 body

17 **Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru R prázdná množina?**

A) $\dfrac{15 \cdot x}{15^2 \cdot x^2} < 0$

B) $\dfrac{x - 15^2}{15^2 - x} < 0$

C) $(x + 15)^2 \leq 0$

D) $x^2 + (-15)^2 \leq 0$

E) $x - 15^2 < x + 15^2$

Řešení:

A) $\dfrac{15 \cdot x}{15^2 \cdot x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{15x} < 0, \quad \mathrm{K_A} = (-\infty; 0)$

B) $\dfrac{x - 15^2}{15^2 - x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x - 225}{x - 225} > 0, \quad \mathrm{K_B} = \mathbf{R} \setminus \{225\}$

C) $(x + 15)^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 15 = 0, \quad \mathrm{K_C} = \{-15\}$

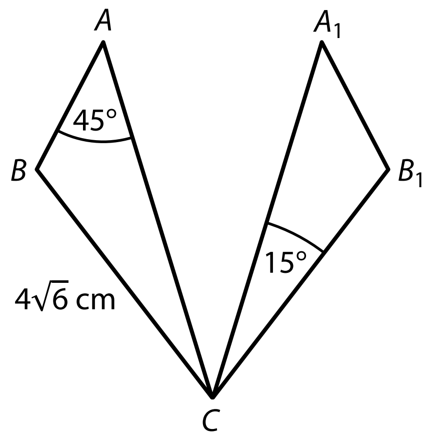
D) $x^2 + (-15)^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq -225, \quad \mathbf{K_D} = \emptyset$

E) $x - 15^2 < x + 15^2 \quad \Leftrightarrow \quad -225 < 225, \quad \mathrm{K_E} = \mathbf{R}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti je trojúhelník A_1B_1C.

Platí: $|BC| = 4\sqrt{6}$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 45°$, $|\sphericalangle A_1CB_1| = 15°$



(CZVV)

2 body

18 Jaká je délka strany A_1C?

A) $4\sqrt{3}$ cm

B) 10 cm

C) 12 cm

D) $8\sqrt{3}$ cm

E) jiná délka

Řešení:

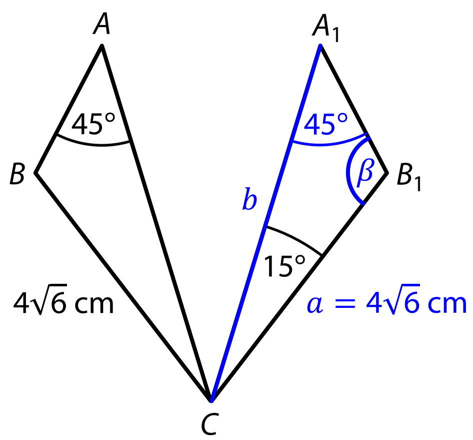
Trojúhelníky ABC a A_1B_1C jsou shodné, tedy platí:

$$|B_1C| = |BC| = a = 4\sqrt{6}\text{ cm}$$
$$|\sphericalangle B_1A_1C| = |\sphericalangle BAC| = \alpha = 45°$$

V trojúhelníku A_1B_1C určíme velikost vnitřního úhlu při vrcholu B_1: $\beta = 180° - (45° + 15°) = 120°$

Podle sinové věty v trojúhelníku A_1B_1C platí:

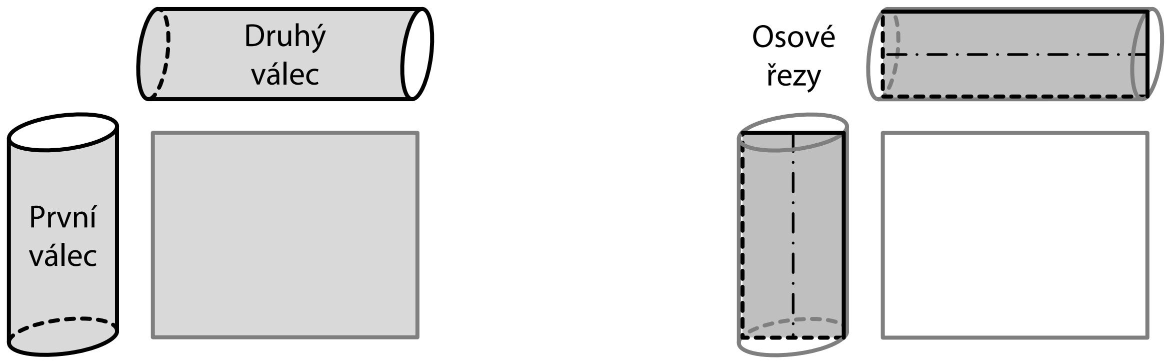
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$



$$b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{6}\text{ cm}\cdot\sin 120°}{\sin 45°} = \frac{4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\text{ cm} = 12\text{ cm}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZKY K ÚLOHÁM 19–20

Tentýž obdélník je rozvinutým pláštěm prvního i druhého rotačního válce.
Délky sousedních stran obdélníku jsou v poměru 5 : 4. Výška prvního válce se shoduje s kratší stranou obdélníku, výška druhého válce s delší stranou obdélníku.



(CZVV)

2 body

19 V jakém poměru je objem prvního válce ku objemu druhého válce?

A) 1 : 1

B) 5 : 4

C) 25 : 16

D) 125 : 64

E) v jiném poměru

Řešení:

Délku kratší strany obdélníku označíme a, délka delší strany obdélníku je tedy $\frac{5}{4}a$.

Výška prvního válce: $v_1 = a$

Delší strana obdélníku se shoduje s obvodem podstavy prvního válce: $o_1 = \frac{5}{4}a$

Výška druhého válce: $v_2 = \frac{5}{4}a$

Obvod podstavy druhého válce: $o_2 = a$

Obvody libovolných dvou kruhů jsou ve stejném poměru jako jejich poloměry, tedy mezi poloměry podstav válců platí stejný vztah jako mezi obvody podstav:

$o_1 = \frac{5}{4}a, \qquad o_2 = a$

$o_1 = \frac{5}{4}o_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = \frac{5}{4}r_2$

Poměr objemů obou válců:

$$V_1 : V_2 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 v_1}{\pi r_2^2 v_2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{4}r_2\right)^2 \cdot a}{\pi \cdot r_2^2 \cdot \frac{5}{4}a} = \frac{\frac{25}{16}\pi r_2^2 a}{\frac{5}{4}\pi r_2^2 a} = \frac{5}{4} = 5 : 4$$

2 body

20 V jakém poměru je obsah osového řezu prvního válce ku obsahu osového řezu druhého válce?

A) 1 : 1

B) $\sqrt{5}$: 2

C) 5 : 4

D) 25 : 16

E) v jiném poměru

Řešení:

Užijeme značení z řešení úlohy 19.

Osovým řezem válce je obdélník, jehož stranami jsou průměr podstavy a výška válce.
Obsah osového řezu prvního válce: $S_1 = 2r_1 \cdot v_1$
a druhého válce: $S_2 = 2r_2 \cdot v_2$

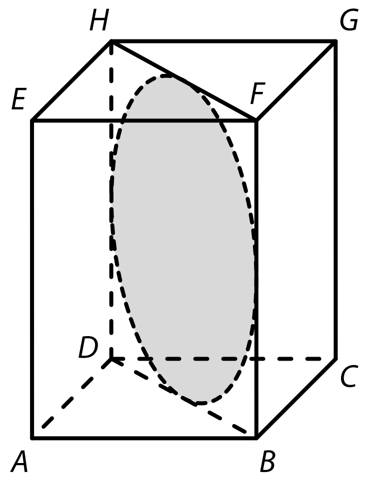
Platí (viz řešení úlohy 19): $r_1 = \frac{5}{4}r_2, \qquad v_1 = a, \qquad v_2 = \frac{5}{4}a$

Poměr obsahů osových řezů obou válců:

$$S_1 : S_2 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2r_1 \cdot v_1}{2r_2 \cdot v_2} = \frac{2 \cdot \frac{5}{4}r_2 \cdot a}{2 \cdot r_2 \cdot \frac{5}{4}a} = \frac{\frac{5}{2}r_2 a}{\frac{5}{2}r_2 a} = \frac{1}{1} = 1 : 1$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Úhlopříčnému řezu *DBFH* pravidelného čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* je vepsán kruh o průměru 8 cm.



(*CZVV*)

2 body

21 Jaký je objem hranolu *ABCDEFGH***?**

A) menší než 256 cm^3

B) 256 cm^3

C) 384 cm^3

D) 512 cm^3

E) větší než 512 cm^3

Řešení:

Výšku pravidelného čtyřbokého hranolu označíme v a objem hranolu označíme V.

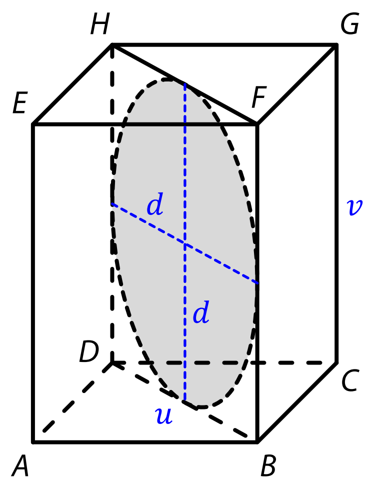
Průměr kruhu d je roven výšce hranolu v a také délce úhlopříčky u čtvercové podstavy hranolu.

Platí: $u = v = d = 8$ cm

Obsah čtvercové podstavy hranolu: $S_\mathrm{p} = \frac{u^2}{2} = \frac{d^2}{2}$

Objem hranolu:

$V = S_\mathrm{p} \cdot v = \frac{d^2}{2} \cdot d = \frac{1}{2} d^3 = \frac{1}{2} \cdot 8^3\ \mathrm{cm}^3 = 256\ \mathrm{cm}^3$



2 body

22 Pro $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$ platí:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Jaká je hodnota $\operatorname{tg} x$ **?**

A) hodnota neexistuje

B) $-\sqrt{3}$

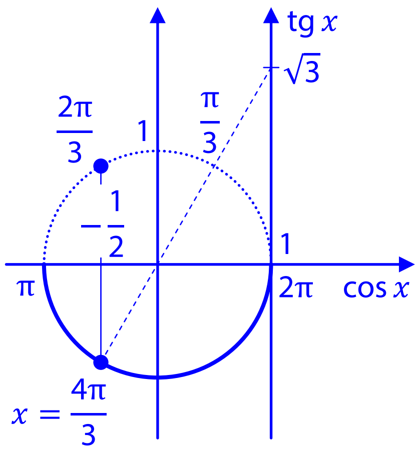
C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $\sqrt{3}$

Řešení:

Využijeme vlastností funkcí kosinus a tangens a známé hodnoty $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (viz obrázek): $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$



případně

Pro $180° \leq x \leq 360°$ má daná rovnice jediné řešení:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 240°$$

Funkce tangens má periodu 180°, tedy platí:

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(240° - 180°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

V balíčku je 10 karet, z nichž právě 4 karty jsou esa.

Z balíčku náhodně vybereme 5 karet.

(*CZVV*)

2 body

23 Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými pěti kartami budou právě 3 esa?

A) $\frac{1}{42}$

B) $\frac{2}{21}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{5}{21}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

Řešení:

Počet všech možností, jak vybrat pětici z 10 karet v balíčku: $\binom{10}{5}$

Aby mezi vybranými pěti kartami byla právě 3 esa (jev označíme E_3),
musejí být vybrána 3 ze 4 es v balíčku a k nim 2 jiné karty ze 6 možných $(10 - 4 = 6)$.

Počet výsledků příznivých jevu E_3: $\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2}$

Pravděpodobnost jevu E_3: $P(E_3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{4 \cdot 15}{252} = \frac{5}{21}$

2 body

24 V **geometrické** posloupnosti je třetí člen $a_3 = 2$
a čtvrtý člen je o 3 menší než třetí člen.

Jaký je součet prvních tří členů uvedené geometrické posloupnosti ($a_1 + a_2 + a_3$)?

A) -3

B) 6

C) 15

D) 26

E) jiný součet

Řešení:

V každé geometrické posloupnosti s kvocientem q platí: $a_4 = a_3 \cdot q, \qquad q = \frac{a_4}{a_3}$

V dané posloupnosti platí: $a_3 = 2, \qquad a_4 = a_3 - 3$

kvocient posloupnosti: $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3 - 3}{a_3} = \frac{2 - 3}{2} = -\frac{1}{2}$

Vypočteme první dva členy posloupnosti:

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

Součet prvních tří členů: $a_1 + a_2 + a_3 = 8 + (-4) + 2 = 6$

max. 4 body

25 Ke každému bodu A (25.1–25.2) přiřaďte interval (A–F), v němž leží hodnota jeho chybějící souřadnice a_1.

25.1 Jsou dány body $A[a_1; 4]$ a $B[7; -2]$. Střed S úsečky AB má obě souřadnice stejné. A

Řešení:

Pro souřadnice středu $S[s_1; s_2]$ úsečky AB platí:

$$s_1 = \frac{a_1 + 7}{2}, \qquad s_2 = \frac{4 + (-2)}{2}$$

$$s_1 = s_2$$

$$\frac{a_1 + 7}{2} = \frac{4 + (-2)}{2}$$

$$a_1 = -5, \qquad a_1 \in \langle -7; -5 \rangle$$

25.2 Jsou dány body $A[a_1; 0]$, $B[3; -2]$ a $C[1; -1]$. Přímky AB a BC jsou na sebe kolmé. E

Řešení

Směrové vektory přímek AB a BC označíme po řadě $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$\vec{u} = B - A = (3 - a_1; -2 - 0) = (3 - a_1; -2)$

$\vec{v} = C - B = \big(1 - 3; -1 - (-2)\big) = (-2; 1)$

Skalární součin směrových vektorů přímek, které jsou na sebe kolmé, je roven 0:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(3 - a_1; -2) \cdot (-2; 1) = 0$$

$$(3 - a_1) \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = 0$$

$$-6 + 2a_1 - 2 = 0$$

$$a_1 = 4, \qquad a_1 \in (3; 6\rangle$$

A) $\langle -7; -5 \rangle$

B) $(-5; -2\rangle$

C) $(-2; 1\rangle$

D) $(1; 3\rangle$

E) $(3; 6\rangle$

F) v žádném z uvedených intervalů

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.