

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

- **Didaktický test** obsahuje **25 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulačtor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulačtor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–14) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 15–25) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

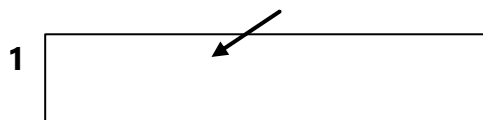
2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.

- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

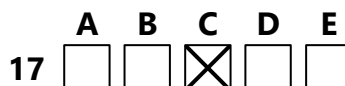
- Výsledky **píšete čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapíšte správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Matěj si na začátku srpna připravil částku, ze které po celý srpen platil všechny výdaje. Ve skutečnosti z ní utratil 15 % za jídlo, nájemné ho stálo o 200 % více než jídlo a za dopravu vydal o 60 % méně než za nájemné. Jiné výdaje Matěj v srpnu neměl, a zbytek připravené částky tedy uspořil.

(CZVV)

1 bod

- 1 Vypočtete, kolik procent částky připravené na srpen Matěj uspořil.**

Řešení:

15 % – jídlo

15 % + 2 · 15 % = 45 % – nájemné

45 % – 0,6 · 45 % = 18 % – doprava

15 % + 45 % + 18 % = 78 %,

100 % – 78 % = 22 %

1 bod

- 2 Pro $a, b, c \in \mathbf{R}$ je dán vztah:**

$$2a + ab^2 + 3c = 0$$

Vyjádřete z tohoto vztahu neznámou a .

Řešení:

$$2a + ab^2 + 3c = 0$$

$$a(2 + b^2) = -3c$$

$$a = \frac{-3c}{b^2 + 2}$$

max. 2 body

- 3 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ zjednodušte:
V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

Řešení:

$$\left(\frac{x^2 + 10}{x} - 1 \right) : \frac{5}{x} = \left(\frac{x^2 + 10}{x^2} - 1 \right) : \frac{5}{x} = \frac{x^2 + 10 - x^2}{x^2} : \frac{5}{x} = \frac{10}{x^2} : \frac{5}{x} = \frac{10}{x^2} \cdot \frac{x}{5} = \frac{2}{x}$$

max. 2 body

4 V oboru \mathbf{R} řešte:

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení:

$$\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2} = 1 \quad x \neq 0; x \neq -2;$$

$$\frac{x-2}{x(x+2)} + \frac{2x}{x+2} = 1 \quad / x \cdot (x+2)$$

$$x-2+2x^2 = x^2+2x$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1) \cdot (x-2) = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 2$$

$$K = \{-1; 2\}$$

max. 2 body

5

5.1 Pro $n \in \mathbf{N}$ upravte na mocninu o základu 64:

Řešení:

$$8 \cdot 64^n = (8^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 64^n = 64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^n = 64^{n+\frac{1}{2}}$$

5.2 Pro $n \in \mathbf{N}$ vyjádřete výrazem ve tvaru jediné mocniny:

Řešení:

$$0,2 \cdot 25^n = \frac{1}{5} \cdot 5^{2n} = 5^{-1} \cdot 5^{2n} = 5^{2n-1}$$

max. 2 body

6 Předpis funkce f definované pro všechna přípustná $x \in \mathbf{R}$ je:

$$y = \log_{10}(8-2x) - \log_{10}(2-x)$$

Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je hodnota funkce f rovna 1.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení:

$$1 = \log_{10} \frac{8-2x}{2-x}$$

$$10 = \frac{8-2x}{2-x}$$

$$20-10x = 8-2x$$
$$-8x = -12$$

$$x = \frac{12}{8}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Zkouška nebo podmínka:

Zkouška:

$$L = 1$$

$$P = \log_{10} 5 - \log_{10} \frac{1}{2} = \log_{10} 10 = 1$$

$$L = P$$

Podmínka:

$$x \in (-\infty; 2)$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

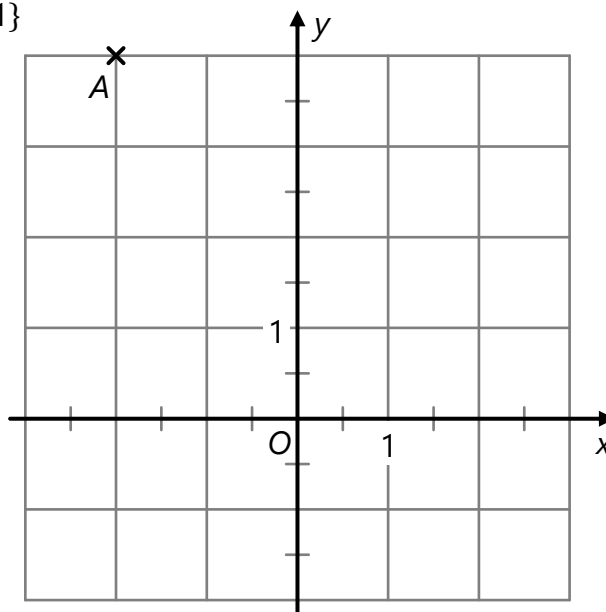
Funkce $g: y = a^x$ se základem $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$.
Její graf prochází bodem $A[-2; 4]$.

$$4 = a^{-2}$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



(CZVV)

max. 2 body

7

7.1 Zapište souřadnici b_2 bodu $B[2; b_2]$ grafu funkce g .

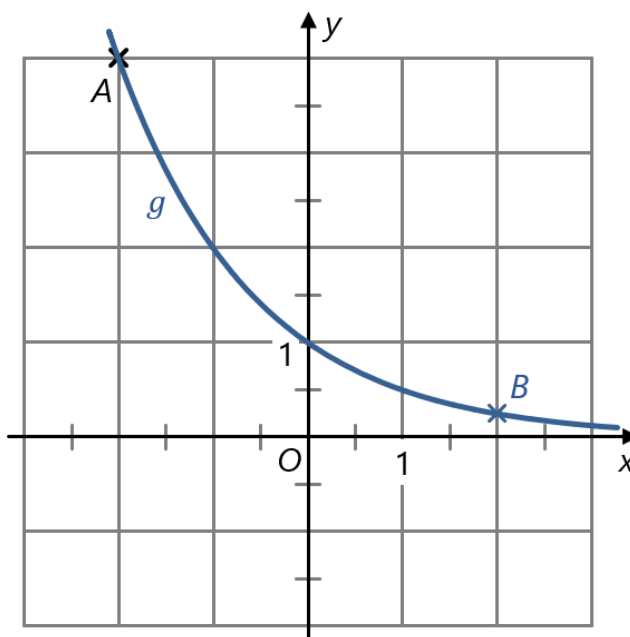
Řešení:

$$b_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

7.2 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf funkce g .

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:



1 bod

- 8 Funkce $h: y = -(x + 6)^2 + 4$ s definičním oborem \mathbf{R} je v jednom ze dvou intervalů $(-\infty; p)$, $\langle p; +\infty)$ klesající a ve zbývajícím je rostoucí ($p \in \mathbf{R}$).

Z obou intervalů vyberte ten, v němž je funkce h rostoucí, a запиšte jej s konkrétním číslem p .

Řešení:

$(-\infty; -6)$

$V[-6; 4]$

Tvar paraboly: \cap

1 bod

- 9 V rostoucí aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je pátý člen $a_5 = 0$. **Vypočtete, kolikrát je dvacátý člen a_{20} větší než desátý a_{10} .**

Řešení:

$$a_{20} = a_5 + 15d$$

$$a_{10} = a_5 + 5d$$

$$\frac{a_{20}}{a_{10}} = \frac{15d}{5d} = 3$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

Na 100 km jízdy spotřeboval automobil A 7 litrů benzínu a automobil B o x litrů benzínu méně než automobil A.

Cena benzínu byla 40 Kč za litr.

(CZVV)

max. 2 body

10

- 10.1 **Vypočtete** v Kč průměrné výdaje za benzin na 1 kilometr jízdy automobilu A. Výsledek nezaokrouhľujte.

Řešení:

7 l na 100 km

0,07 l na 1 km

0,07 · 40 Kč = 2,80 Kč

- 10.2 **V závislosti na x vyjádřete** v Kč průměrné výdaje za benzin na 1 kilometr jízdy automobilu B.

Řešení:

na 100 km $(7 - x)$

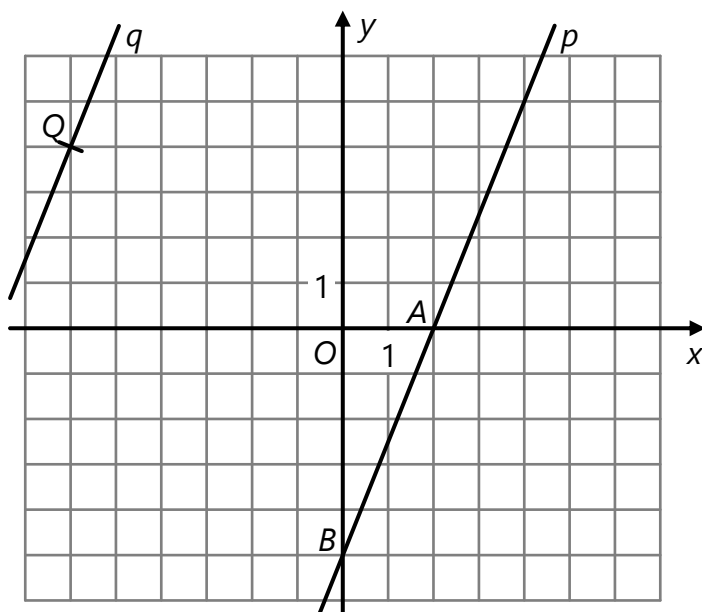
na 1 km $\frac{7 - x}{100}$

$$y = \frac{7 - x}{100} \cdot 40$$

$$y = 2,8 - 0,4x$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 11–12

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou umístěny rovnoběžné přímky p , q .
Přímka p protíná souřadnicové osy v mřížových bodech A , B .
Přímka q prochází bodem $Q[-6; 4]$.



(CZVV)

1 bod

- 11 V parametrickém vyjádření přímky p doplňte pravou stranu první rovnice.

$$p: \begin{cases} x = \quad , \\ y = 0 + 5t, \quad t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Řešení:

$$x = 2 + 2t$$

$$A[2;0]; B[0;-5]$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB}(2;5)$$

1 bod

- 12 Zapište obě souřadnice průsečíku D přímky q se souřadnicovou osou y .

Řešení:

$$x = -6 + 2t$$

$$y = 4 + 5t$$

$$x = 0$$

$$6 = 2t \Rightarrow 3 = t$$

$$y = 4 + 5t$$

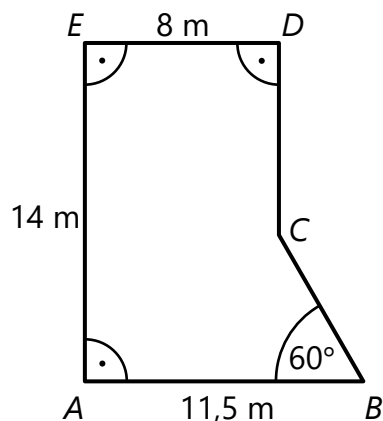
$$y = 4 + 15 = 19$$

$$D[0;19]$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Stavba má tvar pětibokého kolmého hranolu s výškou 5 metrů.

Na obrázku je zakreslena podstava $ABCDE$ tohoto hranolu.



(CZVV)

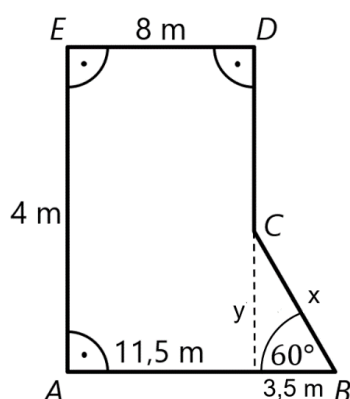
max. 4 body

13 Vypočtěte

Výsledky zaokrouhlete na celá čísla, dílčí výpočty nezaokrouhľujte.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

Řešení:



13.1 v m^2 **obsah** boční stěny hranolu, která obsahuje podstavovou hranu BC ,

Řešení:

$$\cos 60^\circ = \frac{3,5}{x}$$

$$x = 7 \text{ m}$$

$$S = x \cdot v$$

$$S = 7 \text{ m} \cdot 5 \text{ m}$$

$$S = 35 \text{ m}^2$$

13.2 v m^3 **objem** hranolu.

Řešení:

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{7}$$

$$y = \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

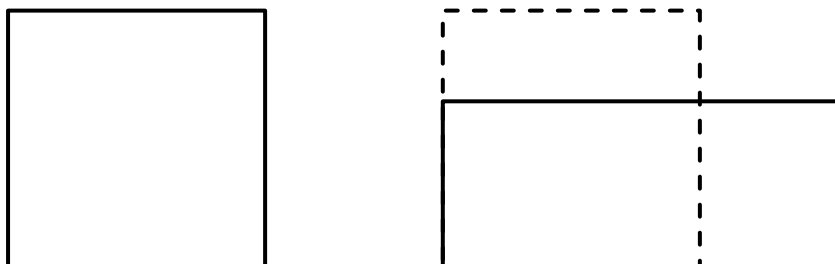
$$S_p = \left(8 \cdot 14 + 3,5 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{4} \right) \text{ m}^2$$

$$V = S_p \cdot v = S_p \cdot 5 \text{ m}$$

$$V \doteq 613 \text{ m}^3$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Čtvercový pozemek má stejnou výměru (obsah) jako obdélníkový pozemek.
Obdélníkový pozemek má jednu stranu o 35 % kratší než čtvercový pozemek a druhou stranu o 140 metrů delší než čtvercový pozemek.



(CZVV)

max. 3 body

- 14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtete v metrech obvod čtvercového pozemku.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

strana čtverce x
1.strana obdelníka $0,65x$
2.strana obdelníka $x + 140$
obsah čtverce $S = x^2$
obsah obdelníka $S = 0,65x(x + 140)$

$$x^2 = 0,65x(x + 140)$$

$$x^2 = 0,65x^2 + 91x$$

$$0,35x^2 - 91x = 0$$

$$x(0,35x - 91) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \text{NŘ}$$

$$x_2 = 260$$

$$o = 4x$$

$$o = 4 \cdot 260 = 1040 \text{ m}$$

max. 3 body

15 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

- 15.1 Nerovnice A N
 $(x - 3)(3 - x) \geq 0$
má v oboru \mathbf{R} více než jedno řešení.

Řešení:

$$(x - 3) \cdot (3 - x) \geq 0$$
$$-(x - 3)^2 \geq 0$$
$$(x - 3)^2 \leq 0$$

- 15.2 Řešením nerovnice
 $(x + 4)(x + 4) \geq 0$
v oboru \mathbf{R} je každé reálné číslo.

Řešení:

$$(x + 4)^2 \geq 0$$

- 15.3 Množinou všech řešení nerovnice
 $\frac{x - 2}{2 - x} > 0$
v oboru \mathbf{R} je prázdná množina.

Řešení:

$$\frac{x - 2}{-(x - 2)} > 0$$

2 body

16 Vektor $\vec{u} = (3; u_2)$ je kolmý k vektoru $\vec{w} = (-3; 1)$.

Jaká je velikost vektoru \vec{u} ?

- A) $3\sqrt{10}$
 B) $\sqrt{10}$
 C) 10
 D) 3
 E) jiná velikost

Řešení:

$$-9 + u_2 = 0$$
$$u_2 = 9$$

$$\vec{u}(3; 9)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Všechny čtyři vrcholy kosočtverce $ABCD$ leží **na souřadnicových osách** kartézské soustavy souřadnic Oxy . Pro vrcholy A, B kosočtverce platí, že orientovaná úsečka AB je umístěním vektoru $\vec{v} = (12; 5)$.

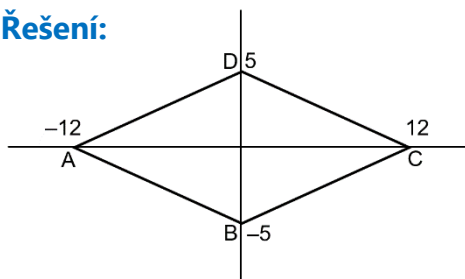
(CZVV)

2 body

17 Jaký je obsah kosočtverce $ABCD$?

- A) 52
- B) 60
- C) 120
- D) 169
- E) jiný obsah

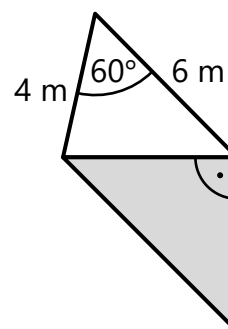
Řešení:



$$\frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$
$$4 \cdot 30 = 120$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Nad pískovištěm je natažena stínicí plachta tvaru čtyřúhelníku, který se skládá ze dvou trojúhelníků – bílého a šedého. Šedý trojúhelník je rovnoramenný a pravoúhlý.



(CZVV)

2 body

18 Jaký je obsah šedého trojúhelníku?

- A) $10,0 \text{ m}^2$
- B) $10,4 \text{ m}^2$
- C) $13,0 \text{ m}^2$
- D) $13,5 \text{ m}^2$
- E) $14,0 \text{ m}^2$

Řešení:

$$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 16 + 36 - 24$$

$$x^2 = 28$$

$$S = \frac{x^2}{2} = 14 \text{ m}^2$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Papírový klobouk se skládá ze tří částí – střechy, koruny a krempy.

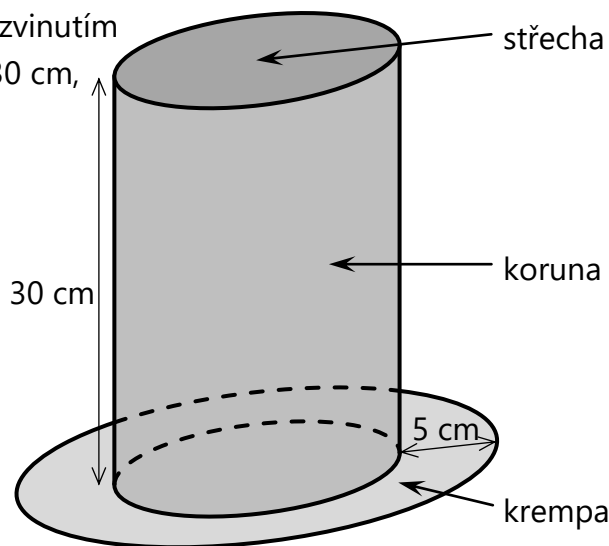
Střechu tvoří kruh, který je horní podstavou rotačního válce.

Koruna je pláštěm tohoto válce a jejím rozvinutím by vznikl obdélník o rozměrech 60 cm a 30 cm, druhý rozměr je výškou válce.

Krempa má tvar mezikruží o šířce 5 cm.

Klobouk byl vyroben z papíru, který je z jedné strany modrý a z druhé bílý.

Jednotlivé části klobouku k sobě přiléhají svými okraji a jsou sešity nití.



(CZVV)

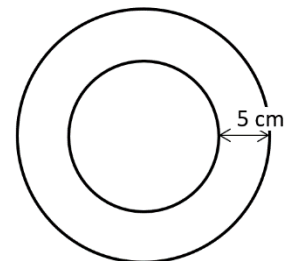
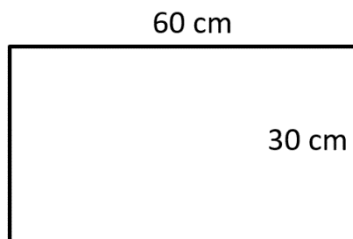
2 body

19 Jaký je obsah všech modrých ploch klobouku?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2 .

- A) 2 086 cm^2
- B) 2 465 cm^2
- C) 4 472 cm^2
- D) 4 851 cm^2
- E) jiný obsah

Řešení:



$$S_{pl} = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ cm}^2$$

$$o_s = 2\pi r_s$$

$$r_s = \frac{o_s}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$$

$$S_{sk} = \pi r^2$$

$$S_{sk} = \pi \left(\frac{30}{\pi} + 5 \right)^2 = 665,1 \text{ cm}^2$$

$$S = (1800 + 665) \text{ cm}^2 = 2465 \text{ cm}^2$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Předpis funkce h definované pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je:

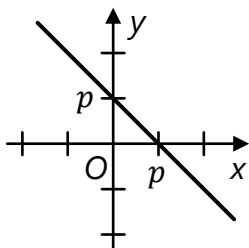
$$y = 2 - x$$

(CZVV)

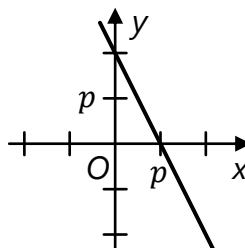
2 body

20 Který z následujících grafů je pro vhodné kladné číslo p grafem funkce h v kartézské soustavě souřadnic Oxy ?

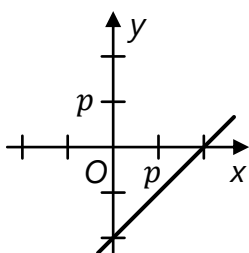
(A)



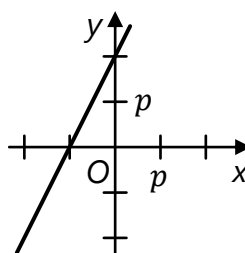
B)



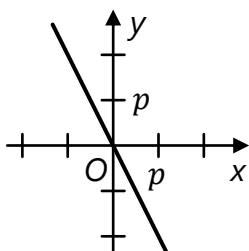
C)



D)



E)



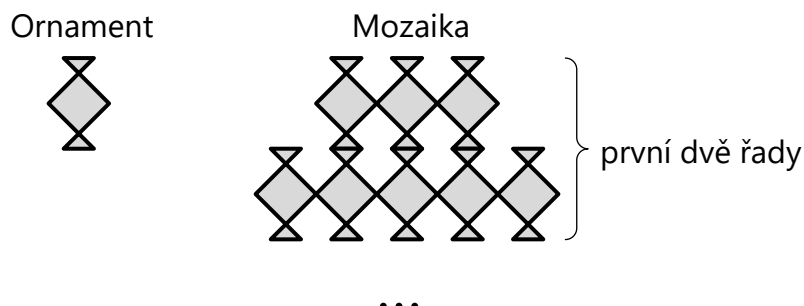
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Mozaika je tvořena řadami stejných ornamentů.

První řada mozaiky obsahuje 3 ornamentey.

Každá další řada obsahuje o 2 ornamentey více než předchozí řada.

Poslední řada mozaiky obsahuje 99krát více ornamentů než první řada.



(CZVV)

2 body

21 Kolik ornamentů obsahuje celá mozaika?

- A) 15 000
- B) 22 200
- C) 29 700
- D) 30 000
- E) jiný počet

Řešení:

$$d = 2$$

$$a_n = 99 \cdot 3 = 297$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$297 = 3 + (n-1) \cdot 2$$

$$294 = (n-1) \cdot 2$$

$$148 = n$$

$$s_n = \frac{148}{2} \cdot (3 + 297) = 22\,200$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22

První dva členy aritmetické posloupnosti jsou zároveň prvními dvěma členy geometrické posloupnosti. Přitom první člen je o 8 menší než druhý a druhý člen je pětkrát větší než první.

(CZVV)

2 body

22 Kolikátý člen aritmetické posloupnosti je roven třetímu členu geometrické posloupnosti?

- A) žádný člen
- B) pátý člen
- C) šestý člen
- D) sedmý člen
- E) osmý člen

Řešení:

$$\text{AP: } d = 8$$

$$\text{GP: } q = 5$$

$$a_1: a_1 + 8 = 5c_1$$

$$8 = 4c_1$$

$$c_1 = 2$$

$$a_n = a_1 \cdot 25$$

$$a_1 + (n-1) \cdot 8 = a_1 \cdot 25$$

$$8n - 8 = 24c_1$$

$$8n - 8 = 48$$

$$n = 7$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Ve městě se postupně ruší poštovní schránky a nové se nezřizují.

Počet poštovních schránek na konci každého kalendářního roku je vždy nižší alespoň o 12 %, ale nejvýše o 14 % počtu poštovních schránek, které byly ve městě na počátku téhož roku.

Na konci roku 2021 (tj. na počátku roku 2022) bylo ve městě 38 poštovních schránek.

(CZVV)

2 body

23 Kolik poštovních schránek se ve městě zrušilo během dvouletého období 2021 až 2022?

- A) Nelze jednoznačně určit.
- B) právě 9
- C) právě 10
- D) právě 11
- E) právě 12

Řešení:

$$43,2 \xleftarrow{12\%} 38 \xrightarrow{12\%} 33,4$$

$$44,2 \xleftarrow{14\%} 38 \xrightarrow{14\%} 32,7$$

$$44 \qquad \qquad \qquad 33$$

jediné celé číslo v daném intervalu

$$x = 44 - 33 = 11$$

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 24

Všech 15 zaměstnanců firmy je rozděleno do tří různě početných skupin.

V tabulce jsou uvedeny některé údaje o platech těchto zaměstnanců.

Skupina	X		Y				Z
Počet zaměstnanců	1	3	2	1	3	4	1
Plat (v Kč) jednoho zaměstnance	22 000	?	31 000	?	37 000	?	50 000
Průměrný plat (v Kč) zaměstnance skupiny	25 000		?				50 000
Průměrný plat (v Kč) zaměstnance firmy	34 000						

2 body

24 Jaký je průměrný plat zaměstnance skupiny Y?

- A) nižší než 27 000 Kč
- B) 27 000 Kč
- C) 36 000 Kč
- D) vyšší než 36 000 Kč
- E) Nelze jednoznačně určit.

Řešení:

$$\frac{4 \cdot 25\,000 + 10x + 50\,000}{15} = 34\,000$$

$$x = 36\,000$$

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 25

V osudí je deset stejných míčků, každý je označen jedním z písmen A, B, C. Tabulka udává rozdělení četností písmen.

Písmeno	A	B	C
Četnost	5	2	3

Z osudí postupně po jednom vylosujeme 3 míčky, které do osudí nevracíme. Jejich písmena zapíšeme zleva doprava v pořadí, v jakém byly míčky vylosovány.

(CZVV)

max. 4 body

25 Ke každému jevu (25.1–25.2) přiřadte pravděpodobnost (A–F), s níž jev nastane.

25.1 Zápis písmen vylosovaných míčků je ABC.

 D

25.2 Zápis písmen vylosovaných míčků je BCC.

 E

Řešení:

A) $\frac{1}{4}$

$$25.1 \quad P_1 = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{24}$$

B) $\frac{1}{12}$

$$25.2 \quad P_2 = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{60}$$

C) $\frac{1}{20}$

D) $\frac{1}{24}$

E) $\frac{1}{60}$

F) jiná hodnota pravděpodobnosti

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.
