MATEMATIKA+

MXMVD20C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

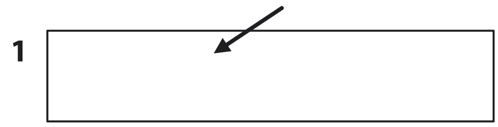
- **Didaktický test** obsahuje **23 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–12) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 13–23) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

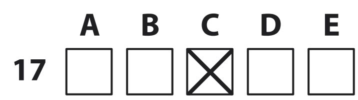
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



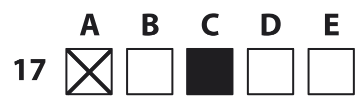
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 **Pro** $a \in (0; +\infty)$ **a** $n \in$ **N zjednodušte** (výraz nesmí obsahovat závorky)**:**

$\sqrt{(a^{4n})^9} =$

---

1 bod

2 Je dán výraz:

$$\frac{\log_3 9^x}{\log_3 (x-9)}$$

Určete všechny hodnoty $x \in$ **R, pro něž má výraz smysl.**

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

> V dílně se pracuje na dvou strojích.
>
> Na prvním stroji se za určitou dobu vyrobí n výrobků, zatímco na druhém stroji se za dobu o třetinu delší vyrobí $2n$ výrobků.
>
> Na **obou** strojích se za p hodin vyrobí dohromady $10n$ výrobků.
>
> (*CZVV*)

max. 2 body

3

3.1 Vypočtěte, kolikrát více výrobků se za stejnou dobu vyrobí na druhém stroji než na prvním stroji.

3.2 V závislosti na p vyjádřete, za kolik hodin se $10n$ výrobků vyrobí jen na prvním stroji.

max. 2 body

4 Neznámé číslo je o 462 větší než jeho druhá **odmocnina**.

Vypočtěte neznámé číslo. Sestavenou rovnici řešte v oboru **R**.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 5

Každý z 10 soutěžících mohl získat 0 až 3 trestné body.

Četnosti představující počty soutěžících, kteří získali stejný počet trestných bodů, jsou v první tabulce uvedeny **v nesprávném pořadí**.

Při správném přiřazení četností je medián a modus počtu trestných bodů stejný. Ze všech takových možností je správná pouze ta, která vede k nejmenší možné hodnotě aritmetického průměru počtu trestných bodů.

Trestné body	0	1	2	3
Četnost	0	2	3	5

Oprava

Trestné body	0	1	2	3
Četnost				

(*CZVV*)

1 bod

5 **Z údajů ve správně vyplněné tabulce vypočtěte aritmetický průměr počtu trestných bodů.**

max. 2 body

6 V trojúhelníku *ABC* jsou dány vrcholy $A[-6; 2]$, $B[0; 0]$.
Střed *S* kružnice *k* opsané trojúhelníku *ABC* leží na souřadnicové ose *y*.

Vypočtěte souřadnice středu *S* kružnice *k*.

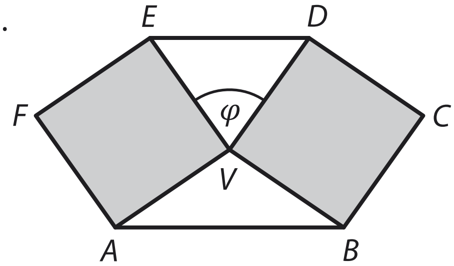
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Šestiúhelník *ABCDEF* je rozdělen na dva bílé rovnoramenné trojúhelníky a dva shodné tmavé čtverce. Všechny čtyři útvary mají společný vrchol *V*.

Součet obsahů obou bílých trojúhelníků označme S_B.

Součet obsahů obou tmavých čtverců označme S_T.

Úhel *DVE* má velikost $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



(*CZVV*)

max. 2 body

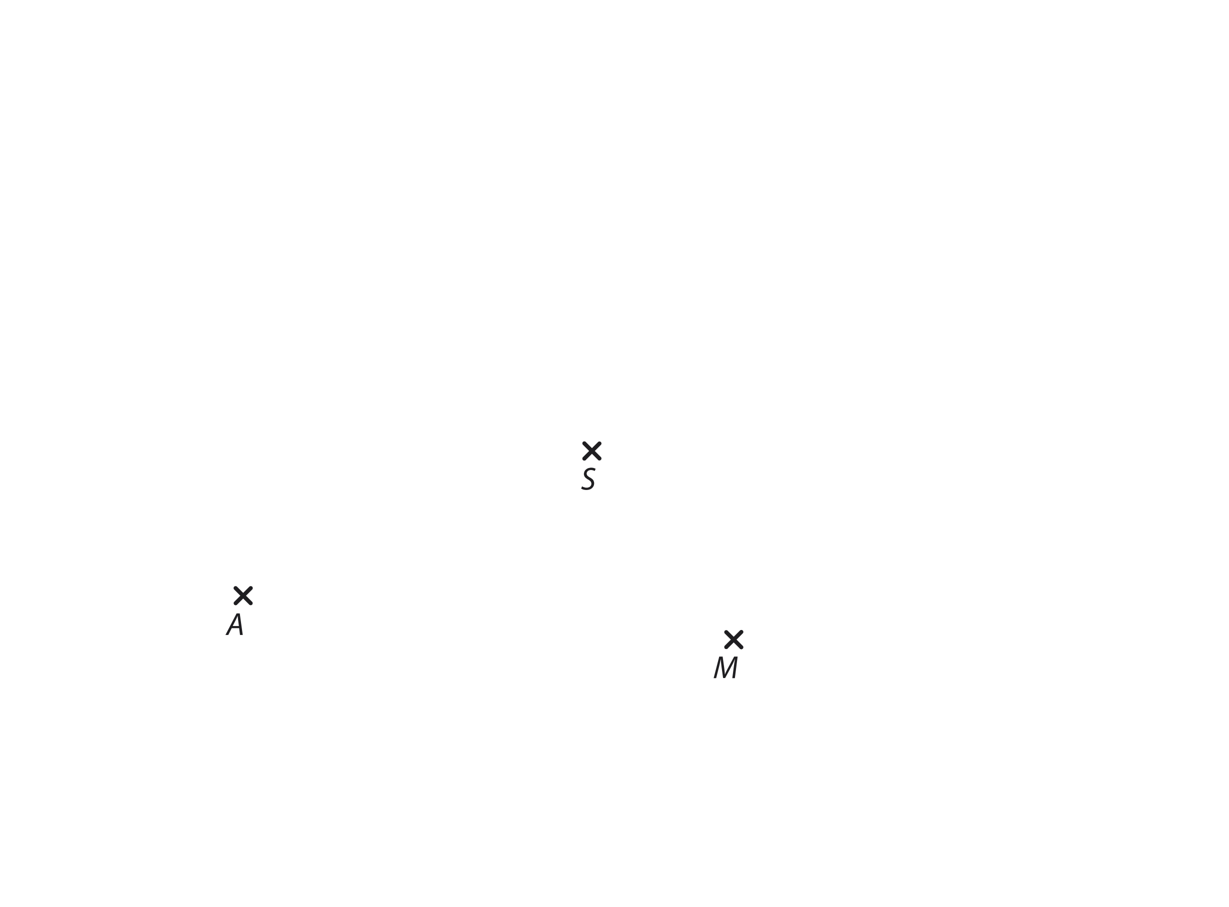
7

7.1 Vyjádřete poměr obsahů $S_B : S_T$ v závislosti na velikosti úhlu φ.

7.2 Vypočtěte velikost úhlu φ, je-li poměr obsahů $S_B : S_T$ roven $1 : 4$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině jsou dány tři různé body *A*, *S*, *M*.



(*CZVV*)

max. 3 body

8 Bod *A* je vrchol trojúhelníku *ABC*.
Bod *S* je střed kružnice opsané trojúhelníku *ABC*. Bod *M* leží na ose strany *BC*.
Vnitřní úhel trojúhelníku *ABC* při vrcholu *A* má velikost $\alpha = 60°$.

8.1 Hledáme vrcholy *B*, *C* trojúhelníku *ABC*.
Proveďte náčrtek trojúhelníku *ABC* a zapište rozbor nebo postup konstrukce.

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy *B*, *C* trojúhelníku *ABC* a trojúhelník narýsujte.
Najděte všechna řešení.

V záznamovém archu obtáhněte všechny čáry a křivky **propisovací tužkou**.

max. 2 body

9 Graf kvadratické funkce f se dotýká souřadnicové osy x v bodě *T*.
V předpisu funkce $f: y = x^2 + (p + 2)x + 0{,}25p^2$ je neznámé reálné číslo p.

Určete

9.1 neznámé číslo p,

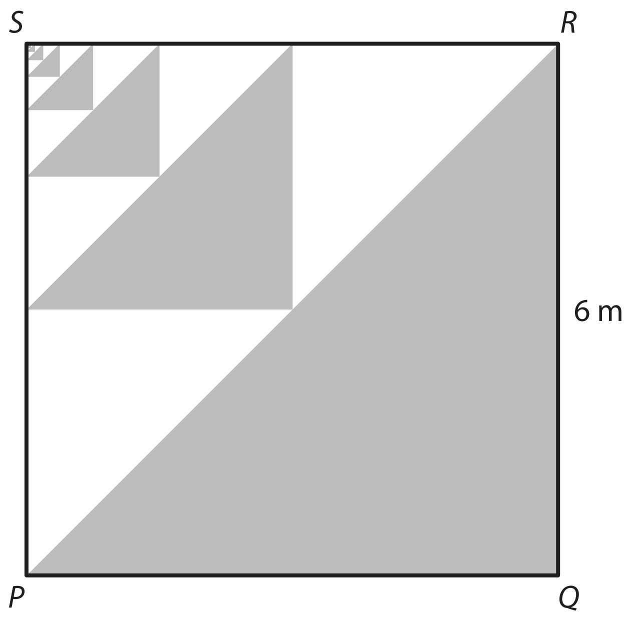
9.2 souřadnice bodu dotyku *T*.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Ve čtverci *PQRS* o straně délky 6 m je nekonečně mnoho stále se zmenšujících tmavých rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Největší z nich je trojúhelník *PQR*.

Každý následující trojúhelník má vrchol pravého úhlu uprostřed přepony předchozího trojúhelníku, což je i jediný společný bod obou trojúhelníků.

Středem stejnolehlosti libovolné dvojice těchto trojúhelníků je vrchol *S*.



(*CZVV*)

max. 2 body

10 Vyjádřete poměr obsahu všech bílých ploch ku obsahu všech tmavých ploch ve čtverci *PQRS*.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

max. 4 body

11 V rostoucí aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí, že první, druhý a pátý člen (a_1, a_2, a_5) v tomto pořadí tvoří první tři členy geometrické posloupnosti.

11.1 Vyjádřete diferenci d aritmetické posloupnosti v závislosti na prvním členu a_1.

11.2 Určete kvocient q geometrické posloupnosti.

11.3 Určete, kolikátým členem aritmetické posloupnosti je 5. člen geometrické posloupnosti.

11.4 Vyjádřete v závislosti na k, kolikátým členem aritmetické posloupnosti je k-tý člen geometrické posloupnosti.

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Z dlouhodobých statistik vyplývá, že 5 % osob má vlastnost A a 10 % osob vlastnost B. Obě vlastnosti se nepodmiňují, naopak jsou nezávislé.

(*CZVV*)

max. 3 body

12 **Vypočtěte** s přesností na tisíciny **pravděpodobnosti jevů:**

12.1 Náhodně vybraná osoba nemá ani jednu z obou vlastností A, B.

12.2 Alespoň jedna z 5 náhodně vybraných osob má alespoň jednu z obou vlastností A, B.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

max. 3 body

13 Přiřaďte ke každé nerovnici (13.1–13.3) množinu všech jejích řešení (A–F) v oboru R.

13.1 $\dfrac{|3-x|}{|x-3|} > \dfrac{x}{3}$ ______

13.2 $\dfrac{\sqrt{x+3}}{9-x^2} > 0$ ______

13.3 $\dfrac{9-x^2}{9+x^2} > 1$ ______

A) $\emptyset$

B) $(-\infty; 3)$

C) $(-3; 3)$

D) $(-3; +\infty)$

E) $(3; +\infty)$

F) jiná množina

max. 3 body

14 Každá funkce daná některým z následujících předpisů je definována pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$.

Přiřaďte ke každému předpisu funkce (14.1–14.3) útvar (A–F), na němž leží všechny body grafu této funkce.

14.1 $y = \frac{2x}{\sqrt{x}}$ ______

14.2 $y = \frac{|x|}{2x}$ ______

14.3 $y = \frac{\sqrt{x^2}}{2}$ ______

A) jedna přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou *x*

B) jedna přímka různoběžná se souřadnicovou osou *x*

C) dvojice rovnoběžných polopřímek neležících na téže přímce

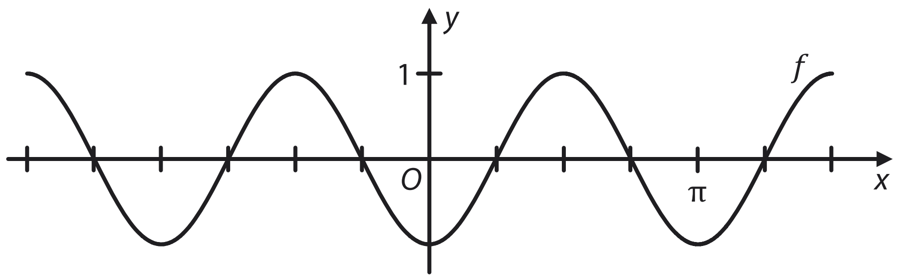
D) dvojice různoběžných polopřímek

E) hyperbola

F) parabola

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 15

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf goniometrické funkce f definované pro všechna $x \in \mathbf{R}$.



(*CZVV*)

2 body

15 **Která z rovností <u>není</u> předpisem funkce f?**

A) $y = -\cos 2x$

B) $y = -\cos(-2x)$

C) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

D) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$

E) Všechny uvedené rovnosti (A–D) jsou předpisy téže funkce f.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Pětimístný kód má být sestaven z 5 **různých** číslic.

Z číslic 0–9 kód musí obsahovat číslice 0, 1, 2 a s nimi ještě další dvě číslice. Číslice 0 bude uprostřed kódu.

(CZVV)

2 body

16 Jaký je počet všech možností pro sestavení kódu?

A) 144

B) 252

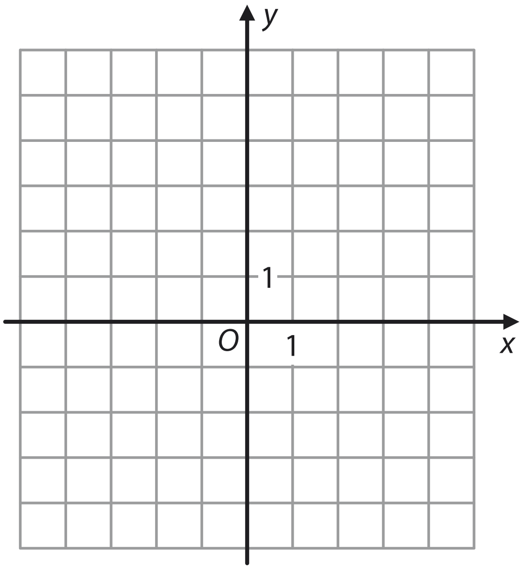
C) 432

D) 504

E) jiný počet

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

V trojúhelníku *NOP* platí: $\overrightarrow{NO} = (2; -5)$, $\overrightarrow{OP} = (1; 5)$.



(CZVV)

2 body

17 Jaká je velikost konvexního úhlu *ONP*?
Výsledek je zaokrouhlen na desetiny stupně.

A) 67,9°

B) 68,0°

C) 68,1°

D) 68,2°

E) jiná velikost

2 body

18 Na parabole s ohniskem $F[0; 9]$ a řídicí přímkou $d: y = -9$ leží dva různé body A, B, jejichž druhá souřadnice je $y = 4$.

Jaká je vzdálenost bodů *A*, *B*?

A) menší než 18

B) 18

C) 20

D) 22

E) 24

---

2 body

19 Bod $A[0; 1; 2]$ je vrchol krychle *ABCDEFGH*.
Stěna *EFGH* této krychle leží v rovině $\varrho: 2x - 3y + z + 15 = 0$.

Jaký je povrch této krychle?

A) menší než 84

B) 84

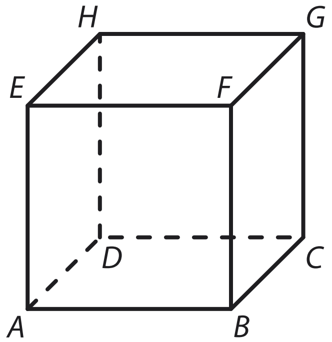
C) 126

D) 192

E) větší než 192

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V krychli *ABCDEFGH* s hranou délky 6 cm je umístěn **trojboký** jehlan *ACEH*.



(*CZVV*)

2 body

20 Jaký je objem trojbokého jehlanu *ACEH*?

A) $36\ \text{cm}^3$

B) $48\ \text{cm}^3$

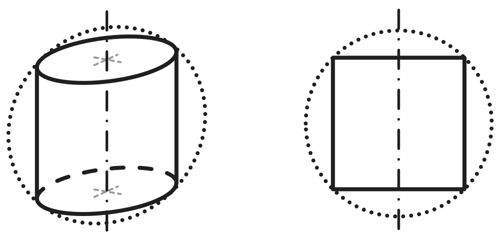
C) $54\ \text{cm}^3$

D) $72\ \text{cm}^3$

E) jiný objem

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Kulová plocha o poloměru r je opsána rovnostrannému válci.
(Výška rovnostranného válce se shoduje s průměrem podstavy.)



Osový řez válce

(*CZVV*)

2 body

21 Jaký je objem válce?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi r^3$

B) $\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \pi r^3$

C) $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \pi r^3$

D) $\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \pi r^3$

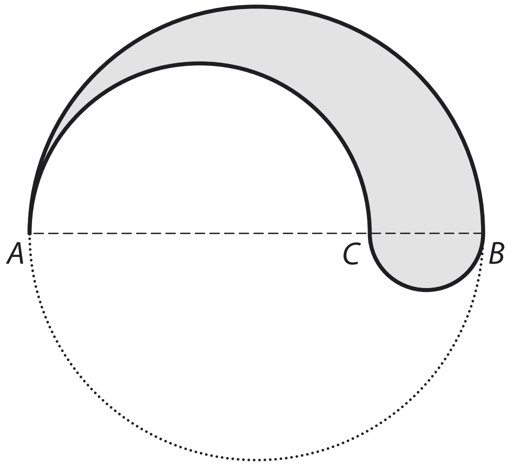
E) jiný objem

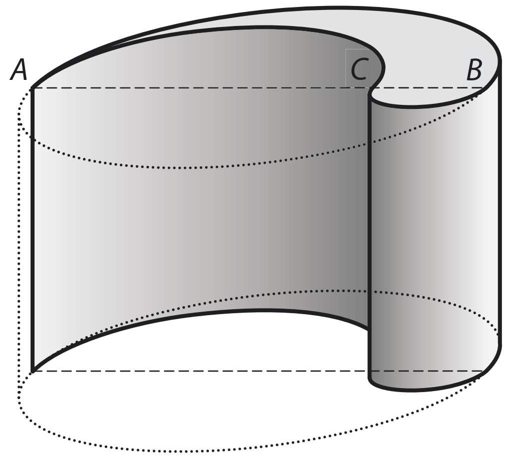
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Z rotačního válce s výškou 10 cm a průměrem podstavy 16 cm bylo vysoustruženo nové kolmé těleso stejné výšky.

Podstava nového tělesa je ohraničena třemi půlkružnicemi s krajními body *A*, *B*, *C*, kde bod *C* dělí průměr *AB* podstavy původního válce na dvě úsečky, z nichž *CB* má délku 4 cm.

Podstava nového tělesa





Nové těleso je (obdobně jako rotační válec) ohraničeno dvěma podstavami a pláštěm.

(*CZVV*)

2 body

22 O kolik cm^2 se liší <u>obsah pláště</u> nového tělesa a obsah pláště původního válce?

A) Nové těleso má obsah pláště o 32π cm^2 menší než původní válec.

B) Nové těleso má obsah pláště o 16π cm^2 menší než původní válec.

C) Oba obsahy jsou stejné.

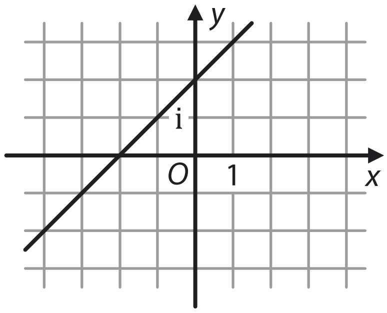
D) Nové těleso má obsah pláště o 32π cm^2 větší než původní válec.

E) Obsahy se liší jinak, než je výše uvedeno.

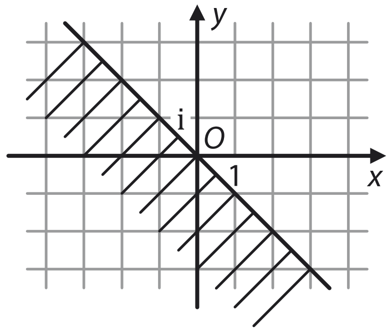
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 23

V Gaussově rovině jsou zobrazeny tři množiny komplexních čísel z.

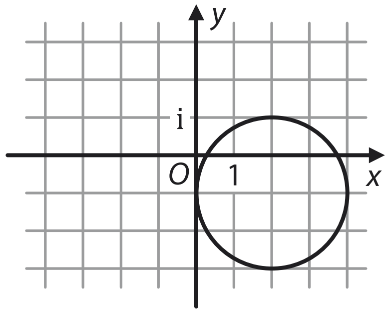
23.1
Přímka



23.2
Polorovina



23.3
Kružnice



(*CZVV*)

max. 3 body

23 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (23.1–23.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
23.1	Zobrazená přímka je určena rovnicí $\lvert z-1-\mathrm{i}\rvert = \lvert z-3+\mathrm{i}\rvert$.	☐	☐
23.2	Zobrazená polorovina je určena nerovnicí $\lvert z+1\rvert \le \lvert z-\mathrm{i}\rvert$.	☐	☐
23.3	Zobrazená kružnice je určena rovnicí $\lvert 2\mathrm{i}\rvert = \lvert z-2+\mathrm{i}\rvert$.	☐	☐

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.