

MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD23COT04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

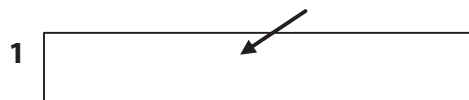
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulačtor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulačtor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píše do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

- Výsledky **píšte čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapíšte správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvete původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYNI!

max. 2 body

1 Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{-0,5; 0\}$ upravte výraz:

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{a} + 2}\right)^{-2} - \frac{4 + \frac{1}{a}}{a} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

max. 2 body

2 Pro $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ platí:

$$(-6; x + 3) \cap (2x; 6) = (-4; y)$$

2.1 Určete neznámé číslo x .

2.2 Určete neznámé číslo y .

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

V prodejně obuvi měli na začátku zimy o 500 párů dámských bot více než pánských. Během zimy se prodalo o 20 % více dámských bot než pánských a na konci zimy zbylo v prodejně již jen 120 párů dámských bot a 80 párů pánských bot.

(CZVV)

max. 3 body

3 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtete, kolik párů pánských bot se během zimy prodalo.**

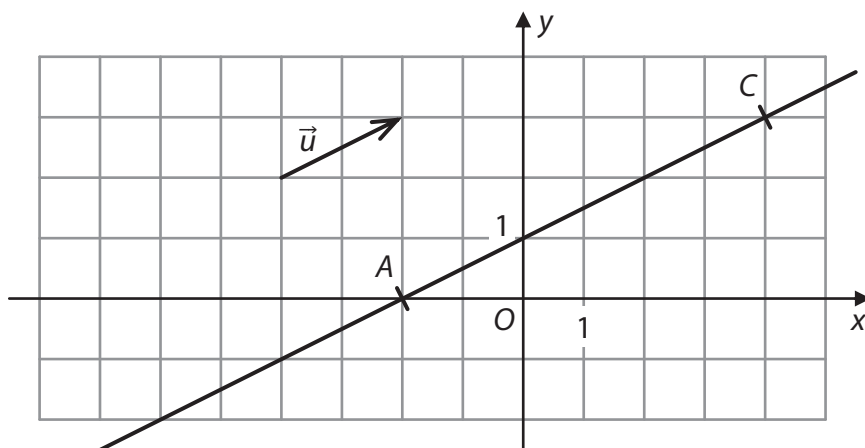
V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

4 **Vypočtěte** (i je imaginární jednotka):

$$\frac{|3i| + 7}{|3 - 4i|} =$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Libovolný bod X přímky AC lze vyjádřit rovnicí $X = A + t \cdot \vec{u}$, kde $t \in \mathbf{R}$.



Body A , C i počáteční a koncový bod orientované úsečky, která je umístěním vektoru \vec{u} , jsou v mřížových bodech.

(CZVV)

1 bod

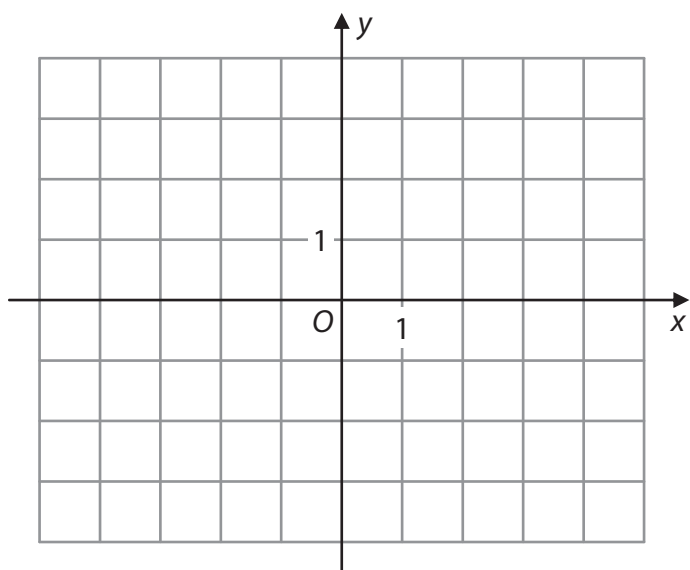
5 **Určete množinu všech hodnot parametru t , pro něž je bod X bodem úsečky AC .**

$t \in$ _____

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Elipsa má rovnici $x^2 - 2x - 15 + 4y^2 = 0$.

Tečny k elipse v jejích hlavních a vedlejších vrcholech vymezují obdélník $KLMN$.



(CZVV)

max. 3 body

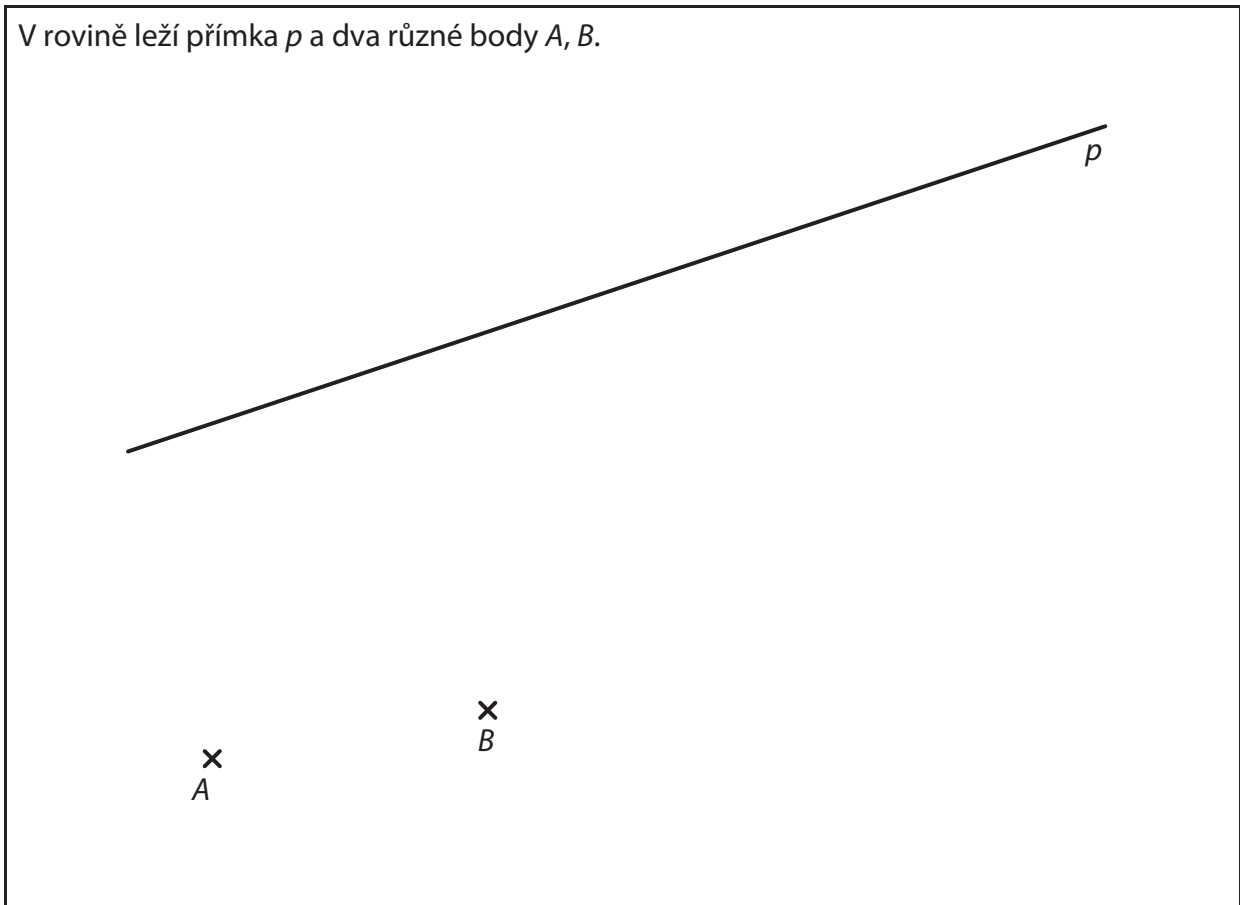
6

- 6.1 Určete obě souřadnice středu $S[s_1; s_2]$ elipsy.
- 6.2 Vypočtěte excentricitu e elipsy.
- 6.3 V kartézské soustavě souřadnic Oxy zakreslete obdélník $KLMN$.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V rovině leží přímka p a dva různé body A, B .



(CZVV)

max. 3 body

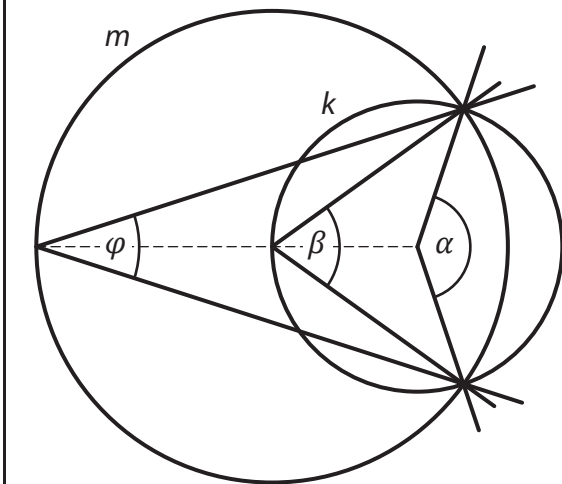
- 7** Body A, B jsou vrcholy trojúhelníku ABC , vrchol C leží na přímce p .
Těžnice t_b na stranu AC má stejnou délku jako strana AB .
- 7.1 Hledáme vrchol C trojúhelníku ABC .
Provedte náčrtek trojúhelníku ABC a zapište rozbor nebo postup konstrukce.

- 7.2 V obrázku sestrojte chybějící vrchol trojúhelníku ABC a trojúhelník narýsujte.
Najděte všechna řešení.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Vrcholy úhlů α , β jsou středy kružnic k , m . Vrcholy úhlů β , φ leží na kružnicích k , m . Vrcholy všech tří úhlů leží na téže přímce a ramena úhlů procházejí průsečíky kružnic k , m .



(CZVV)

max. 2 body

8

- 8.1 Pro $\beta = 80^\circ$ vypočtěte rozdíl $\alpha - \varphi$.
- 8.2 Vypočtěte velikost β , jestliže $\alpha + \varphi = 180^\circ$.

9 Pro kružnici k a přímku p platí:

$$k: x^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$p: y = x + 2$$

Zapište souřadnice průsečíků P, Q přímky p a kružnice k (pokud existují).

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

10 V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$a_n = 30n - n^2$$

10.1 Určete počet všech kladných členů posloupnosti.

10.2 Určete pořadí k největšího členu a_k posloupnosti.

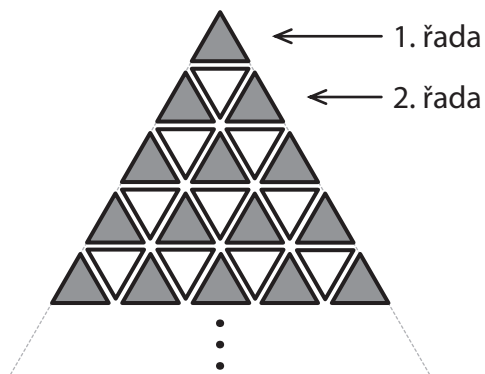
V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Ornament trojúhelníkového tvaru je složen z tmavých a světlých trojúhelníků.

V první řadě je jeden tmavý trojúhelník. Ve druhé řadě je jeden světlý a dva tmavé trojúhelníky.

V každé další řadě je o jeden světlý i jeden tmavý trojúhelník více než v řadě předcházející.



(CZVV)

max. 4 body

11 Ornamenty A, B, C vyhovují uvedeným podmínkám.

11.1 **Nejdelší řada** ornamentu A obsahuje 23 **tmavých** trojúhelníků.

Určete počet všech trojúhelníků (tmavých i světlých) v ornamentu A.

11.2 V ornamentu B je celkem 1225 **světlých** trojúhelníků.

Určete počet všech trojúhelníků (tmavých i světlých) v nejdelší řadě ornamentu B.

11.3 Počet **všech** trojúhelníků (tmavých i světlých) v ornamentu C představuje parametr p , kde p je druhá mocnina přirozeného čísla.

V závislosti na parametru p vyjádřete počet t tmavých trojúhelníků v ornamentu C.

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy celý postup řešení.

12 Přiradte ke každému předpisu funkce (12.1–12.3) odpovídající graf funkce (A–F).

12.1

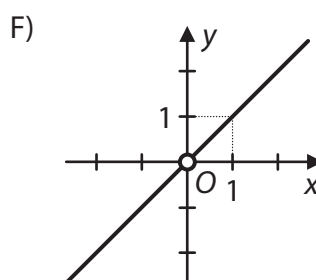
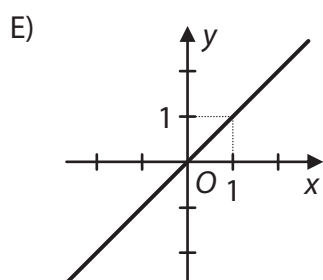
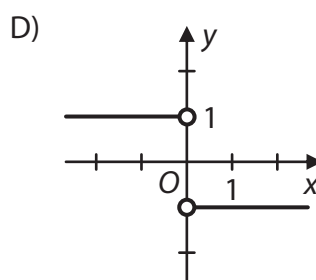
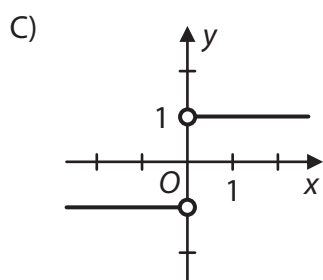
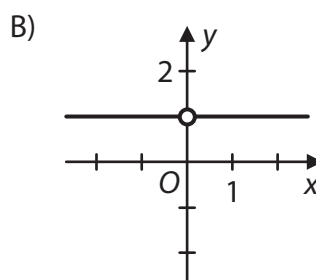
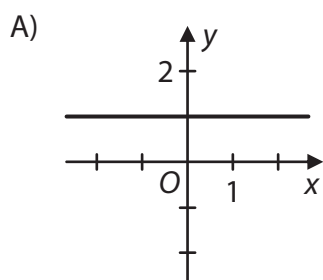
$$y = \frac{5x - 3x}{2}$$

12.2

$$y = \frac{2x}{x + x}$$

12.3

$$y = \frac{|x|}{x}$$



13 Ke každé rovnici (13.1–13.3) řešené v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ přiřadte množinu (A–F), která obsahuje všechna řešení této rovnice.

13.1 $2 \sin x = -1$ _____

13.2 $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 0$ _____

13.3 $\cos^2 x = 1$ _____

A) $\langle 0; \pi \rangle$

B) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

C) $\langle \pi; 2\pi \rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

E) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$

F) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$

2 body

14 Funkce f je definována pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$:

$$f: y = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[6]{x}}\right)^3}$$

Grafem funkce f v kartézské soustavě souřadnic Oxy je

A) část přímky.

B) část paraboly, přičemž osou paraboly je souřadnicová osa x .

C) část paraboly, přičemž osou paraboly je souřadnicová osa y .

D) jedna větev hyperboly.

E) jiná množina bodů než výše uvedené.

15 Je dán výraz $V(n)$ s proměnnou $n \in \mathbf{N}$:

$$V(n) = (n + 2)(n + 3)^2(n + 4)$$

Která čísla z množiny $\{5; 8; 9; 12\}$ jsou pro všechna $n \in \mathbf{N}$ děliteli výrazu $V(n)$?

- A) právě tři čísla z uvedené množiny
- B) právě dvě čísla, a to 8 a 12
- C) právě dvě čísla, a to 5 a 12
- D) pouze číslo 12
- E) žádné číslo z uvedené množiny

16 Je dána rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$ a parametrem $p \in \mathbf{R}$:

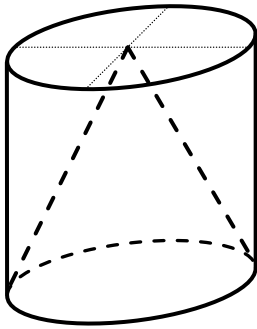
$$(p^2 - p)x = p - 1$$

Které z následujících tvrzení je nepravdivé?

- A) Pro $p = -1$ má rovnice právě jedno řešení $x = -1$.
- B) Pro $p = 1$ je množinou všech řešení rovnice $\mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$.
- C) Pro $p = 0$ rovnice nemá řešení.
- D) Pro dvě různé hodnoty p patří do množiny všech řešení rovnice číslo $x = 0,5$.
- E) Pro libovolné $p \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$ má rovnice právě jedno řešení.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Do rovnostranného válce je vepsán rotační kužel tak, že osy obou těles splývají.
Povrch válce je k -krát větší než povrch kužele.



(Rovnostranný válec je rotační válec, jehož osovým řezem je čtverec.)

(CZVV)

2 body

17 Jaká je hodnota násobku k ?

A) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

B) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

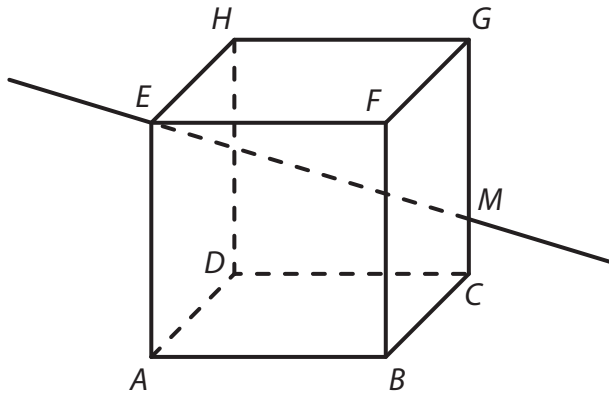
C) $\frac{4}{1 + \sqrt{3}}$

D) $\frac{6}{1 + \sqrt{3}}$

E) $\frac{6}{1 + \sqrt{5}}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Bod M leží uvnitř hrany CG krychle $ABCDEFGH$.



(CZVV)

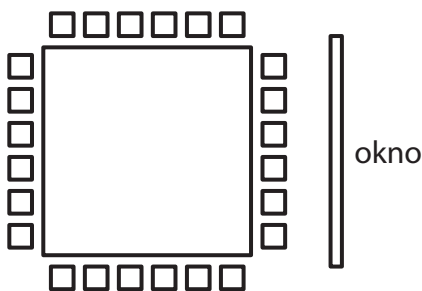
2 body

18 Která přímka má s přímkou EM společný bod?

- A) $\leftrightarrow HB$
- B) $\leftrightarrow HC$
- C) $\leftrightarrow AC$
- D) $\leftrightarrow BC$
- E) žádná z uvedených přímek

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Každou ze čtyř organizací A, B, C, D zastupuje 6 osob. Všechny osoby se posadí ke čtvercovému jednacímu stolu, který má na každé straně 6 židlí. Osoby z téže organizace se posadí ke stejné straně stolu. Hostitelská organizace A zaujme místa nejblíže oknu.



(CZVV)

2 body

19 Kolik existuje způsobů rozsazení všech osob k jednacímu stolu?

- A) $3 \cdot 6!$
- B) $4 \cdot 6!$
- C) $4 \cdot 3! \cdot 6!$
- D) $3 \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!$
- E) $3! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

V osudí jsou 4 modré a 3 červené koule.

Z osudí postupně vytáhneme 5 koulí, tažené koule do osudí nevracíme.

(CZVV)

2 body

20 Jaká je pravděpodobnost, že v tažené pěti koulích bude většina koulí modrých?

A) $\frac{5}{21}$

B) $\frac{4}{7}$

C) $\frac{9}{14}$

D) $\frac{5}{7}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

2 body

21 Je dána nerovnice:

$$\frac{\sqrt{1-x}}{x(x+3)} < 0$$

Která množina je množinou všech řešení dané nerovnice v oboru \mathbb{R} ?

A) $(-3; 0)$

B) $(-3; 1)$

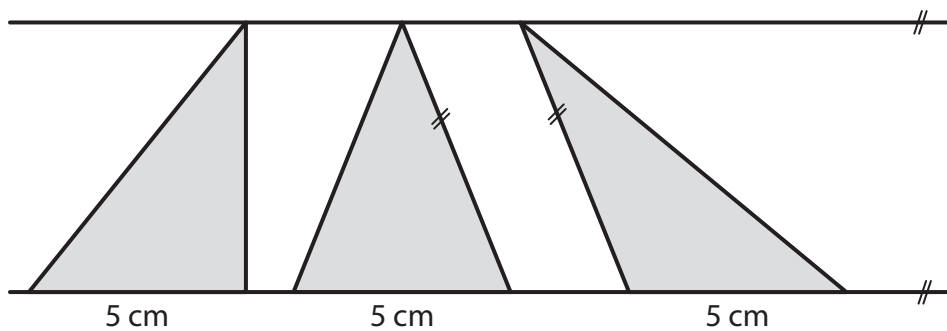
C) $(-\infty; 1)$

D) $(-\infty; -3) \cup (0; 1)$

E) $(-3; 0) \cup (1; +\infty)$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Mezi dvěma rovnoběžkami je umístěn jeden pravoúhlý, jeden rovnoramenný a jeden tupoúhlý trojúhelník. Ve všech třech trojúhelnících má **nejkratší** strana délku 5 cm.



(CZVV)

max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

- | | A | N |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 22.1 Obsah rovnoramenného trojúhelníku je větší než obsah tupoúhlého trojúhelníku. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 22.2 Pro každou výšku v libovolném z uvedených trojúhelníků platí, že její velikost je <u>nepřímo</u> úměrná délce příslušné strany. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 22.3 V tupoúhlém trojúhelníku jsou právě dvě výšky kratší než 5 cm. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.