

MATEMATYKA ROZSZERZAJĄCA

MXMVD23P0T01

TEST DYDAKTYCZNY

Maksymalna ilość punktów: 50

Próg zaliczenia: 33%

1 Podstawowe informacje dotyczące zadań

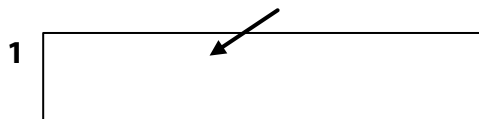
- **Test dydaktyczny zawiera 22 zadania.**
- **Czas pracy** oznaczono w kartach odpowiedzi.
- **W czasie pracy można korzystać tylko z:** przyborów do pisania i rysowania, „Tablic matematyczno-fizyczno-chemicznych” i prostego kalkulatora bez karty graficznej, nieposiadającego funkcji rozwiązywania równań i przekształcania wyrażeń algebraicznych. Nie można używać kalkulatora programowalnego.
- Obok każdego zadania umieszczono maks. ilość punktów.
- Odpowiedzi wpisuj do karty odpowiedzi.
- **Niejednoznaczny lub nieczytelny zapis zostanie uznany za błędny.**
- Notować można w arkuszu zadań, notatki nie zostaną ocenione.
- Pierwszą część testu dydaktycznego (zadania 1–11) tworzą **zadania otwarte**.
- W drugiej części testu dydaktycznego (zadania 12–22) zawarte są zadania zamknięte z wyborem odpowiedzi. We wszystkich zadaniach /lub ich częściach/ **tylko jedna odpowiedź jest poprawna**.
- Za brak rozwiązania lub nieprawidłowe rozwiązanie całego zadania **nie przydziela się punktów ujemnych**.

2 Zasady poprawnego zapisu odpowiedzi

- Pisz długopisem z **niebieskim lub czarnym wkładem**. Pisz **wyraźnie, czytelnie, uważaj, by długopis nie przerywał**.
- O ile będziesz rysować zwykłym ołówkiem, pogrub wszystko długopisem.
- Ocenione zostaną **tylko odpowiedzi umieszczone w karcie odpowiedzi**.

2.1 Wskazówki do zadań otwartych

- Wyniki **wpisuj czytelnie** do wyznaczonych białych pól.



- Jeżeli wymagane jest całe rozwiązanie, przedstaw, oprócz wyniku, cały przebieg rozwiązania. Jeżeli podasz tylko wynik, to nie otrzymasz za to zadanie żadnych punktów.
- **Zapisy obok wyznaczonych białych pól nie zostaną ocenione.**
- Błędny zapis przekreśl i zapisz nowe rozwiązanie.

2.2 Wskazówki do zadań zamkniętych

- Poprawną odpowiedź oznacz wyraźnie krzyżykiem w białym polu na karcie odpowiedzi, wg rysunku – dokładnie.



- Jeżeli chcesz zmienić odpowiedź, starannie zakoloruj oznaczone pole, zaś wybraną odpowiedź oznacz krzyżykiem w nowym polu.



- Jakikolwiek inny sposób wpisywania odpowiedzi i wnoszenia poprawek uznany zostanie za odpowiedź błędną.

NIE OTWIERAJ ARKUSZA ZADAŃ, POCZEKAJ NA DECYZJĘ OSOBY NADZORUJĄCEJ!

1 punkt

1 Wyraż w postaci algebraicznej liczbę zespoloną z , dla której obowiązuje:

$$z = \frac{5i}{2+i}$$

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 2

Liczba rzeczywista x jest **ujemna**.

Wartość wyrażenia $(x - 9)(x + 9)$ jest również ujemna.

(CZW)

1 punkt

2 Określ zbiór wszystkich x spełniających dane warunki.

maks. 2 punkty

3 Rozwiąż w zbiorze \mathbb{R} :

$$|x + 10| + 40 = |x - 30|$$

W karcie odpowiedzi przedstaw cały przebieg rozwiązania.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 4

Parabola ma wierzchołek w początku $O[0; 0]$ kartezjańskiego układu współrzędnych Oxy , jej osią jest oś współrzędnych y .

Styczne tej paraboli poprowadzone z punktu $P[0; -1]$ są do siebie prostopadłe.

(CZW)

maks. 3 punkty

4 Wyznacz

4.1 równania obu tych stycznych,

4.2 równanie paraboli.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 5

W kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy jest dany okrąg k o środku S i promieniu r .

$$k: x^2 + y^2 - 2(x - 2y) = 0$$

(CZVV)

maks. 2 punkty

5

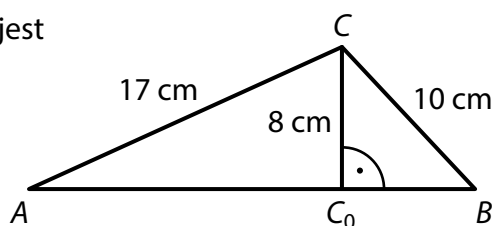
- 5.1 Określ współrzędne środka S .
- 5.2 Oblicz promień r .

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 6

Bryła obrotowa została utworzona przez obrót trójkąta ABC wokół prostej AB .

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku C jest rozwarty, odcinek CC_0 jest wysokością opuszczoną do boku AB i obowiązuje:

$$|AC| = 17 \text{ cm}, |BC| = 10 \text{ cm}, |CC_0| = 8 \text{ cm}$$



(CZVV)

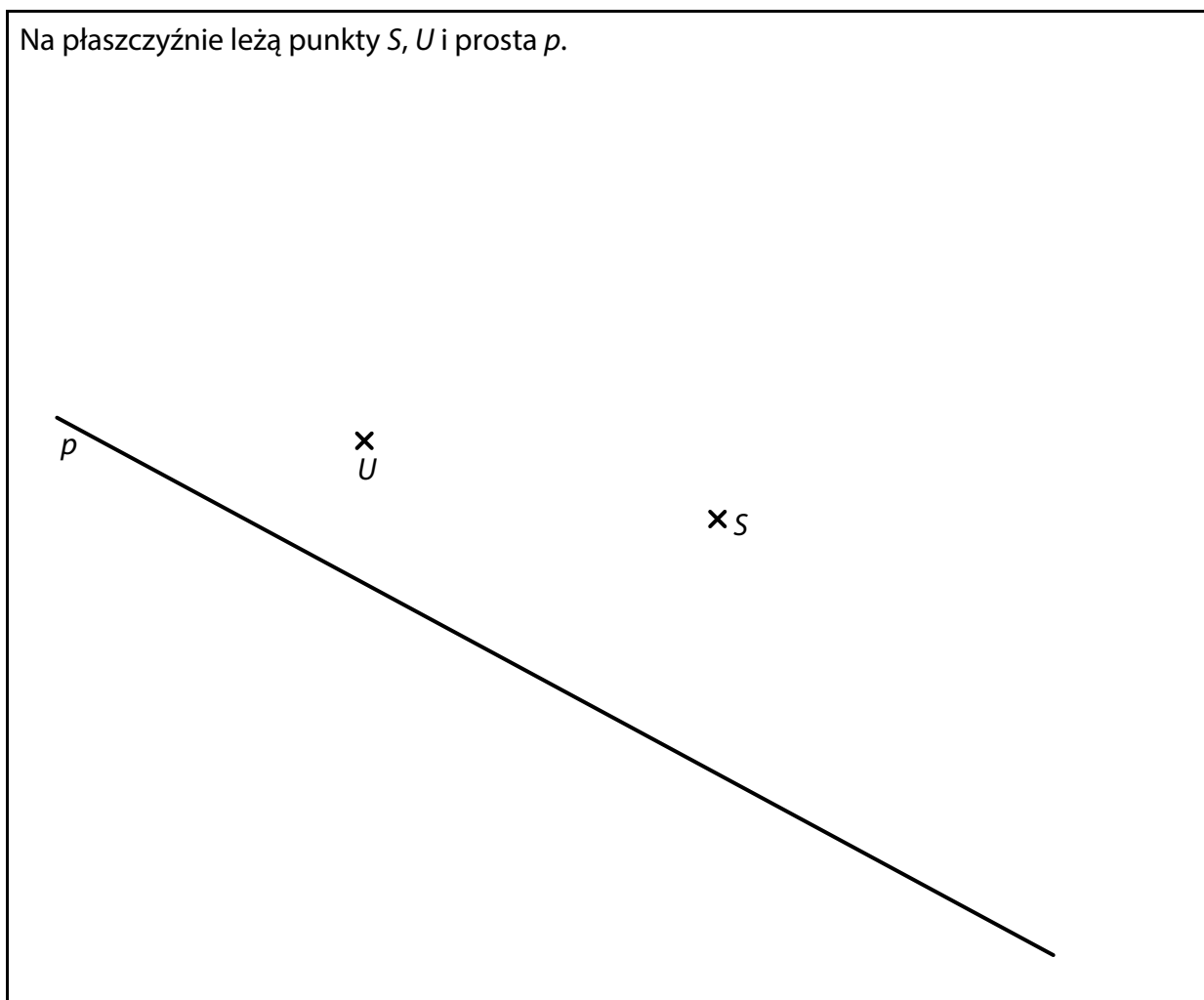
maks. 2 punkty

6 Oblicz

- 6.1 w cm^2 pole powierzchni bryły obrotowej,
- 6.2 w cm^3 objętość bryły obrotowej.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 7

Na płaszczyźnie leżą punkty S , U i prosta p .



(CZVV)

maks. 3 punkty

- 7** Na prostej p leży wierzchołek B trójkąta równobocznego ABC .
Punkt S to środek boku BC tego trójkąta, a punkt U leży na boku AC .
- 7.1 Szukamy wierzchołków trójkąta ABC .
Sporządź szkic trójkąta ABC i przeprowadź analizę lub opisz przebieg konstrukcji wierzchołka C tego trójkąta.
- 7.2 Na rysunku skonstruuj wierzchołki trójkąta ABC i narysuj trójkąt.
Znajdź wszystkie rozwiązania.

W karcie odpowiedzi pogrub wszystko długopisem.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 8

Podczas gry rzuca się żeton, na którym może z równym prawdopodobieństwem wypaść albo liczba 1, albo liczba 0.

Jeśli wypadnie liczba 1, rzuca się żetonem ponownie.

Gra kończy się wtedy, gdy wypadnie liczba 0 lub gdy liczba 1 wypadnie łącznie siedem razy.

Najkrótsza gra kończy się, kiedy już w pierwszym rzucie wypadnie liczba 0.

Jeśli gra zakończy się pojawieniem liczby 0 na przykład dopiero w siódmym rzucie, to liczba 1 wypadła w ciągu całej gry dokładnie 6 razy.

(CZVV)

maks. 3 punkty

8 Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

8.1 Liczba 1 wypadnie w ciągu całej gry dokładnie 3 razy.

8.2 Liczba 1 wypadnie w ciągu całej gry najwyżej 4 razy.

8.3 Liczba 1 wypadnie w ciągu całej gry przynajmniej raz.

Nie zaokrąglaj wyników.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 9

Pan K na okres jednego roku zainwestował wszystkie swoje oszczędności w dwa różne fundusze (A, B). Kwota, którą włożył do funduszu A, była o jedną trzecią wyższa niż kwota, którą włożył do funduszu B.

Całkowity roczny zysk z oszczędności pana K wyniósł 13%. Jednocześnie roczny zysk z kwoty włożonej do funduszu A był zaledwie 10%.

Broker początkowo radził panu K zamienić nawzajem obie kwoty, czyli włożyć tą wyższą do funduszu B, a tą niższą do funduszu A.

(Wzajemna zamiana zainwestowanych kwot nie zmieniłaby wyników poszczególnych funduszy. Nie bierz pod uwagę opłat ani opodatkowania zysków.)

(CZYM)

maks. 3 punkty

9 Oblicz w procentach, jaki byłby całkowity roczny zysk z oszczędności pana K, gdyby zainwestował je zgodnie z radą brokera.

W karcie odpowiedzi przedstaw cały przebieg rozwiązania.

maks. 2 punkty

10 Dany jest skończony ciąg $(a_n)_{n=1}^{118}$, gdzie $a_n = \sin \frac{n \cdot \pi}{5}$.

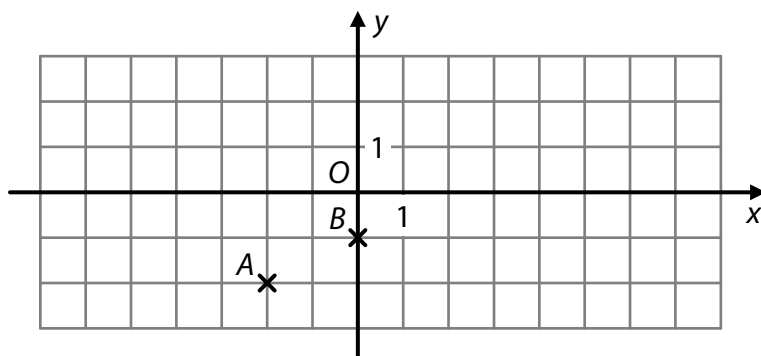
Określ, dla ilu spośród wszystkich 118 wyrazów tego ciągu obowiązuje:

$$a_n = \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right)$$

W karcie odpowiedzi przedstaw cały przebieg rozwiązania.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 11

W kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy dane są punkty $A[-2; -2]$, $B[0; -1]$ i punkt $C[c; 0]$ na osi współrzędnych x , gdzie $c \in \mathbf{R}$.



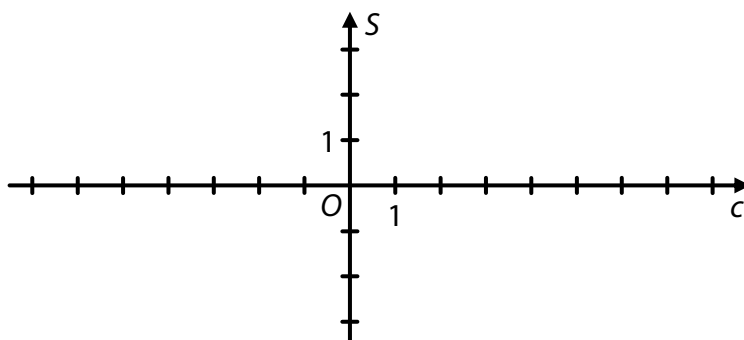
(CZVV)

maks. 3 punkty

11

11.1 **Oblicz pole powierzchni** trójkąta ABC dla $c = 8$.

11.2 **Zapisz wzór** funkcji wyrażającej zależność pola powierzchni S trójkąta ABC od współrzędnej $c \in \mathbf{R}$ punktu C i **skonstruuj wykres** tej funkcji w podanym układzie współrzędnych.



W karcie odpowiedzi przedstaw cały **przebieg rozwiązania** obu części zadania i pogrub wykres **długopisem**.

maks. 3 punkty

12 Przyporządkuj do każdego wyrażenia (12.1–12.3) wyrażenie (A–F), które jest mu równe dla wszystkich $a \in (0; +\infty)$.

12.1 $a^3 \cdot \sqrt[3]{a^6}$ _____

12.2 $a^3 : \sqrt{a^{-3}}$ _____

12.3 $\sqrt{a^6} : \sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$ _____

A) a^5

B) $a^4 \cdot \sqrt{a}$

C) a^4

D) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

E) a^2

F) żadne z podanych

- 13 Każda funkcja określona jednym ze wzorów 13.1–13.3 jest dana dla wszystkich dopuszczalnych wartości $x \in \mathbf{R}$.

Przyporządkuj do każdego wzoru funkcji (13.1–13.3) odpowiedni wykres funkcji (A–F).

13.1

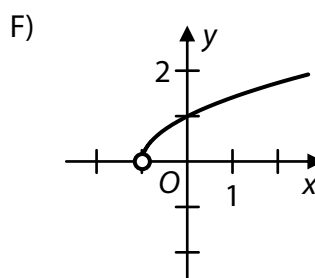
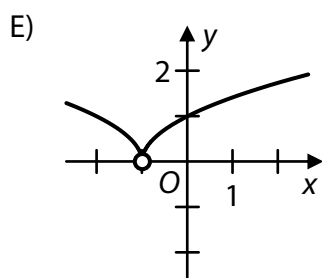
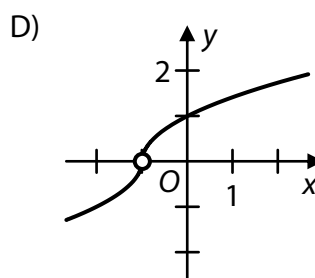
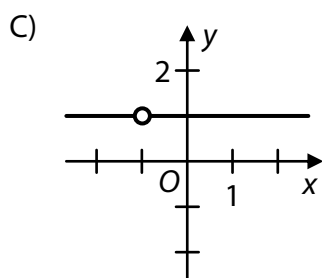
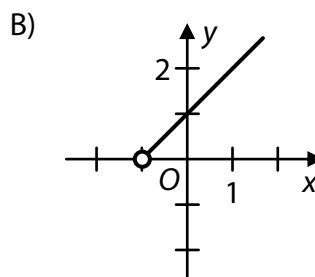
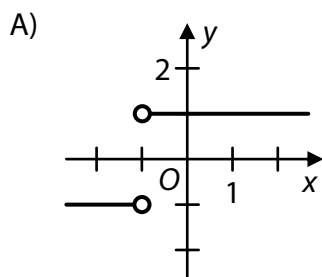
$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{|x + 1|} \quad \text{_____}$$

13.2

$$y = \frac{\sqrt{(x + 1)^3}}{|x + 1|} \quad \text{_____}$$

13.3

$$y = \frac{\sqrt[3]{|x + 1|^3}}{x + 1} \quad \text{_____}$$



TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 14

Do pustego zbiornika wpływa woda przez otwór o regulowanej wielkości $x \in \langle a; b \rangle$.

Objętość wody V przepływającej przez otwór w jednostce czasu jest wprost proporcjonalna do ustawionej wielkości otworu x .

Cały zbiornik zostanie napełniony przez otwór o ustawionej wielkości x w ciągu y godzin, gdzie $y \in \langle c; d \rangle$. Ustawiona wielkość otworu nie zmienia się podczas napełniania zbiornika.

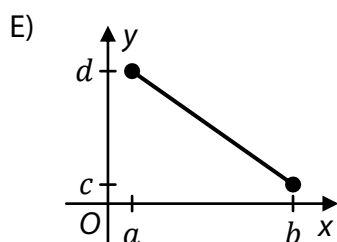
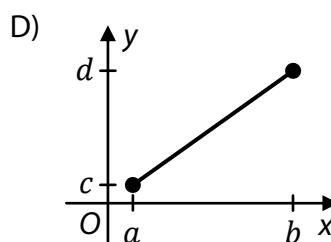
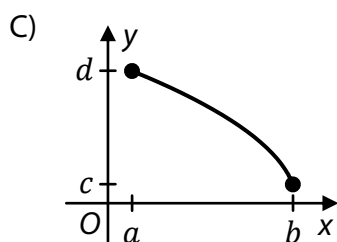
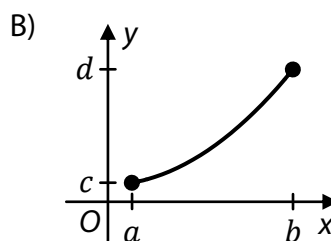
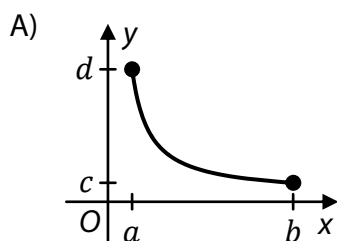
(Liczby a, b, c, d to konkretne dodatnie liczby rzeczywiste.)

(CZYM)

2 punkty

- 14** Każdy z następujących wykresów (A–E) jest skonstruowany w kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy .

Który z wykresów może opisywać zależność czasu, jaki jest potrzebny do napełnienia całego zbiornika, od ustawionej wielkości otworu, tzn. zależność y od x ?



TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 15

W ciągu arytmetycznym $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ suma pierwszych sześciu wyrazów $a_1 + a_2 + \dots + a_6$ jest o 270 mniejsza niż suma następujących sześciu wyrazów $a_7 + a_8 + \dots + a_{12}$.

(CZYM)

2 punkty

15 O ile różni się suma pierwszych trzech wyrazów ciągu $a_1 + a_2 + a_3$ od sumy następujących trzech wyrazów $a_4 + a_5 + a_6$?

- A) o 22,5
- B) o 45
- C) o 67,5
- D) o 135
- E) o inną wartość

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 16

Dany jest nieskończony szereg geometryczny $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, w którym dla wszystkich liczb naturalnych n obowiązuje:

$$a_n = \frac{-3^{2n-1}}{4^n}$$

Jeśli istnieje suma tego szeregu, oznaczamy ją s .

(CZYM)

2 punkty

16 Które zdanie jest prawdziwe?

- A) $s \in (-10^{10}; -10)$
- B) $s \in (-10; 0)$
- C) $s \in (0; 10)$
- D) $s \in (10; 10^{10})$
- E) Nie istnieje skończona suma s (szereg jest rozbieżny).

17 Dana jest nierówność:

$$\frac{2}{x} + \frac{x}{2x - x^2} \geq \frac{-1}{x - 2}$$

Jaki jest zbiór wszystkich rozwiązań danej nierówności w zbiorze R?

- A) $(0; 2)$
- B) $(0; 2) \cup (2; +\infty)$
- C) $(2; +\infty)$
- D) $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$
- E) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 18

W piekarni sprzedają bułki w dwóch wielkościach.

Masa 4 dużych bułek jest taka sama jak masa 9 małych bułek, a 1 duża bułka kosztuje tyle samo co 2 małe bułki.

Piekarnia podaje do pieczywa również cenę jednostkową, czyli cenę przeliczoną na 1 kg pieczywa.

(CZYM)

2 punkty

18 **O ile procent jest cena jednostkowa małej bułki wyższa od ceny jednostkowej dużej bułki?**

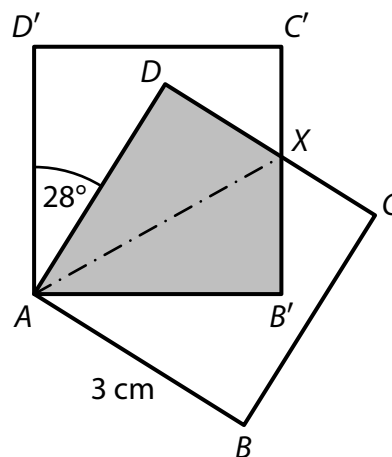
- A) o 7,5 %
- B) o 8 %
- C) o 9 %
- D) o $11,\bar{1}$ %
- E) o 12,5 %

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 19

W obrocie $\mathcal{R}(A; 28^\circ)$ kwadrat $AB'C'D'$ jest obrazem kwadratu $ABCD$ o boku długości 3 cm.

Punkt X to punkt przecięcia odcinków CD i $B'C'$.

Część wspólna obu kwadratów to szary czworokąt $AB'XD$, który jest symetryczny względem osi AX .



(CZVV)

2 punkty

19 Ile wynosi pole powierzchni szarego czworokąta $AB'XD$?

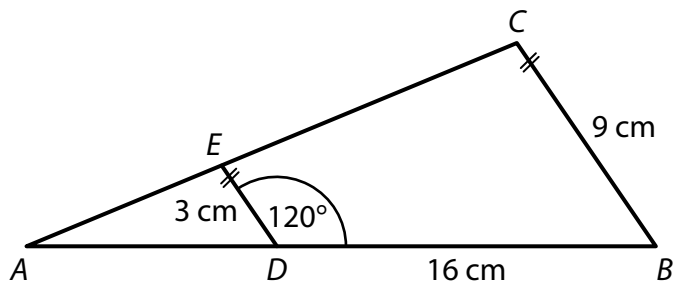
(Wynik jest zaokrąglony do dziesiątych części cm^2 .)

- A) $4,6 \text{ cm}^2$
- B) $4,8 \text{ cm}^2$
- C) $5,0 \text{ cm}^2$
- D) $5,2 \text{ cm}^2$
- E) $5,4 \text{ cm}^2$

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 20

W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB , a punkt E na boku AC .

Dane jest: $DE \parallel BC$, $|DE| = 3 \text{ cm}$, $|BC| = 9 \text{ cm}$, $|BD| = 16 \text{ cm}$, $|\sphericalangle BDE| = 120^\circ$.



(CZVV)

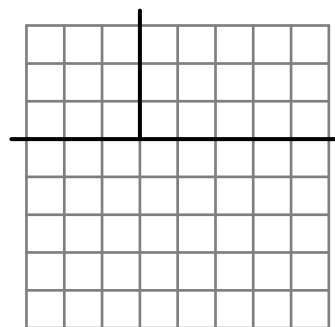
2 punkty

20 Ile wynosi długość odcinka AE ?

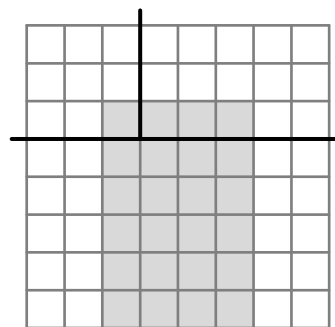
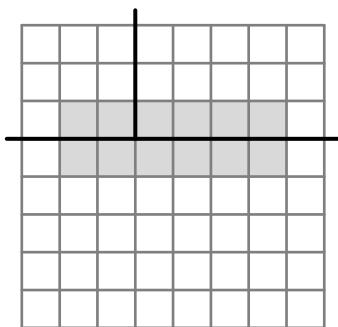
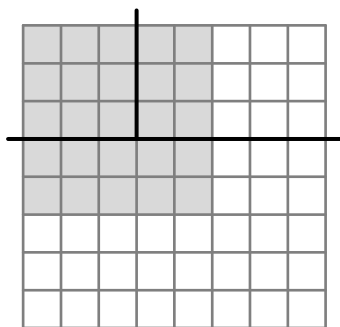
- A) $3\sqrt{3} \text{ cm}$
- B) 6 cm
- C) $4\sqrt{3} \text{ cm}$
- D) 7 cm
- E) $\sqrt{55} \text{ cm}$

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNKI DO ZADANIA 21

Siatka o 8×8 polach kwadratowych jest podzielona na trzy części. Każda część zawiera tylko całe pola (patrz rysunek po prawej). Kolorując całe pola siatki, tworzymy taki czworokąt prostokątny (kwadrat lub prostokąt), który ma przynajmniej jedno pole w każdej z trzech części siatki.



Warunki spełniają na przykład następujące szare czworokąty:



(CZW)

2 punkty

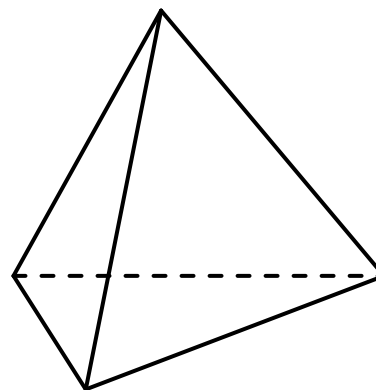
21 Na ile sposobów możemy utworzyć czworokąt spełniający warunki zadania?

- A) 69
- B) 75
- C) 135
- D) 225
- E) 450

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 22

Dany jest czworościan foremny.

Pole powierzchni każdej jego ściany wynosi $9\sqrt{3}$ cm².



(CZVV)

maks. 3 punkty

22 Oceń prawdziwość następujących zdań (22.1–22.3).

Zaznacz T – tak, jeśli jest prawdziwe, lub N – nie, jeśli nieprawdziwe.

22.1 Długość krawędzi czworościanu wynosi 6 cm.

T	N
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

22.2 Wysokość czworościanu jest większa niż 5 cm.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

22.3 Objętość czworościanu wynosi $18\sqrt{2}$ cm³.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

SPRAWDŹ, CZY WPISAŁEŚ/AŚ WSZYSTKIE ODPOWIEDZI DO KARTY ODPOWIEDZI.
