MATEMATIKA

MAMZD23C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

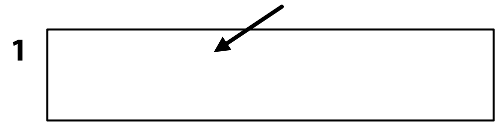
- **Didaktický test** obsahuje **25 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–14) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 15–25) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

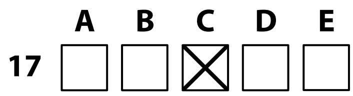
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



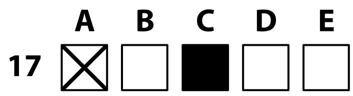
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Firma utržila v únoru pouze čtyři pětiny toho, co utržila v lednu.

(CZVV)

1 bod

1 Určete, o kolik procent více utržila firma v lednu než v únoru.

Řešení:

Tržbu firmy za leden označíme l a tržbu za únor označíme u.

Tržba za únor: $u = \frac{4}{5} \cdot l$

Tržba za leden: $l = \frac{5}{4} \cdot u = 1{,}25u = u + 0{,}25u$

V lednu firma utržila **o 25 %** více než v únoru.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Je dán čtverec o straně délky a.

Obdélník o obsahu 360 cm^2 má jednu stranu o 8 cm delší než daný čtverec a druhou stranu o 8 cm kratší než daný čtverec.

(CZVV)

1 bod

2 Vypočtěte v cm^2 obsah daného čtverce.

Výsledek ani dílčí výpočty nezaokrouhlujte.

Řešení:

Délka strany daného čtverce je a, jeho obsah je tedy a^2.

Délky stran obdélníku: $a + 8$ cm
$a - 8$ cm

Pro obsah obdélníku platí:

$$(a + 8\text{ cm}) \cdot (a - 8\text{ cm}) = 360\text{ cm}^2$$
$$a^2 - 64\text{ cm}^2 = 360\text{ cm}^2$$
$$a^2 = \mathbf{424\text{ cm}^2}$$

Obsah daného čtverce je **424 cm^2**.

max. 2 body

3 **Pro** $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$ **zjednodušte:**

$$\frac{1}{x+2} - \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{\frac{x}{2}} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x+2} - \frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{2}{x} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} - \frac{2x}{(x+2)(x-2)} =$$

$$\frac{-x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{-(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2-x}$$

---

max. 2 body

4 **V oboru R řešte:**

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x^2-x} = \frac{5}{x}$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x^2-x} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{x+5}{x-1} + \frac{5x-1}{x(x-1)} = \frac{5}{x} \qquad \Big| \cdot x(x-1), \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$(x+5) \cdot x + 5x - 1 = 5 \cdot (x-1)$$

$$x^2 + 5x + 5x - 1 = 5x - 5$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x+4)(x+1) = 0$$

$$x_1 = -4, \qquad x_2 = -1$$

$$\mathrm{K} = \{-4;\ -1\}$$

max. 2 body

5 **Pro $x \in$ R, $y \in$ R řešte soustavu rovnic:**

$$x + 2y = 5$$
$$\frac{x}{2} = 10 - 4y$$

Řešení:

$$x + 2y = 5$$
$$\frac{x}{2} = 10 - 4y$$

$$x + 2y = 5$$
$$x = 20 - 8y$$

$$20 - 8y + 2y = 5$$
$$x = 20 - 8y$$

$$-6y = -15$$
$$x = 20 - 8y$$

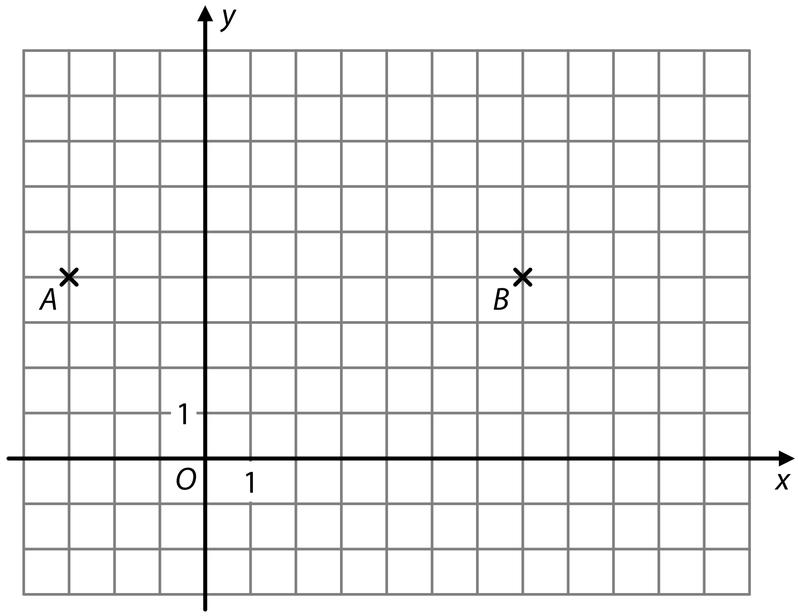
$$y = \frac{5}{2}$$
$$x = 20 - 8 \cdot \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{5}{2}$$
$$x = 0$$

$$\mathbf{K} = \left\{\left[\mathbf{0}; \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right]\right\}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou vyznačeny dva mřížové body *A*, *B*. Jejich vzdálenost je dvojnásobkem vzdálenosti bodu *B* od bodu $K[7; k]$, kde $k \in \mathbf{R}$.



(CZVV)

max. 2 body

6 **Určete souřadnici k.**

Uveďte všechna řešení.

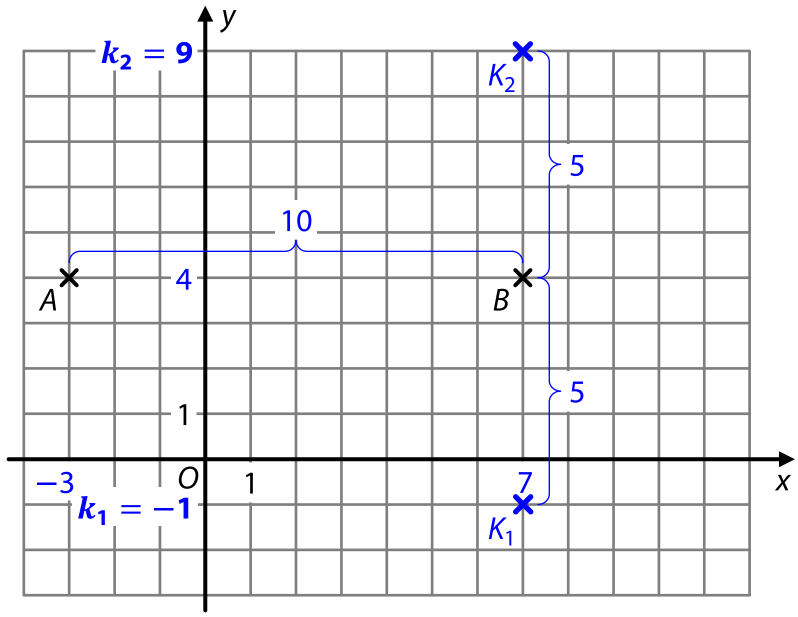
Grafické řešení:

$|AB| = 10$

$|AB| = 2 \cdot |BK|$

$|BK| = \frac{|AB|}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$\boldsymbol{k \in \{-1; 9\}}$



Početní řešení:

Souřadnice zadaných bodů:

$A[-3; 4]$, $B[7; 4]$

Vzdálenost bodů *A*, *B*: $|AB| = \sqrt{(7+3)^2 + (4-4)^2} = 10$

Vzdálenost bodů *B*, *K*: $|BK| = \sqrt{(7-7)^2 + (k-4)^2} = \sqrt{(k-4)^2} = |k-4|$

Platí: $|AB| = 2 \cdot |BK|$

$10 = 2 \cdot |k-4|$

$|k-4| = 5$

$k - 4 = 5 \quad \vee \quad -k + 4 = 5$

$k = 9 \quad \vee \quad k = -1$

$\boldsymbol{k \in \{-1; 9\}}$

max. 2 body

7 Je dán výraz:

$\log_2(8^{-x})$

Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je hodnota daného výrazu rovna osmi.

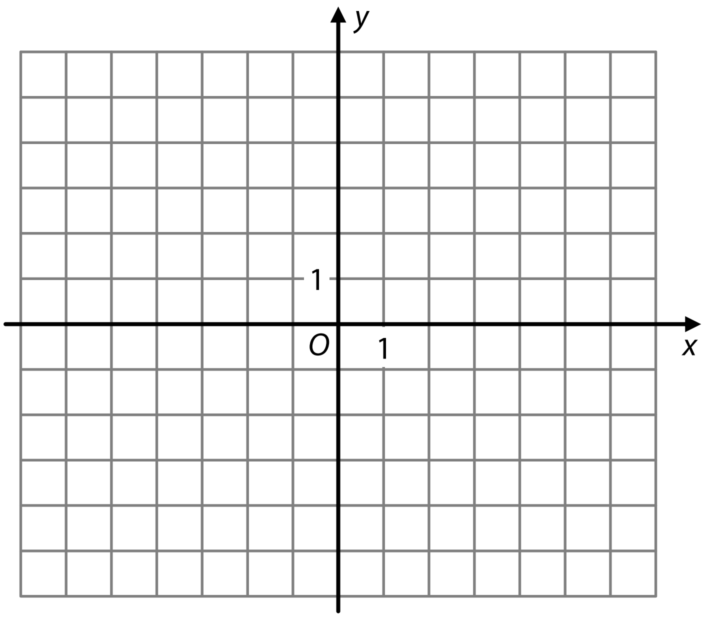
V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\log_2(8^{-x}) = 8, \qquad x \in \mathbf{R}$$
$$-x \cdot \log_2 8 = 8$$
$$-x \cdot 3 = 8$$
$$x = -\frac{8}{3}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Grafem funkce $h: y = \dfrac{3}{x-2} - 4$ je hyperbola se středem S (bod S je průsečík asymptot).
Graf lineární funkce f prochází bodem $R[-5; 1]$ a bodem S.



(CZVV)

max. 2 body

8

8.1 Určete obě souřadnice středu S.

Řešení:

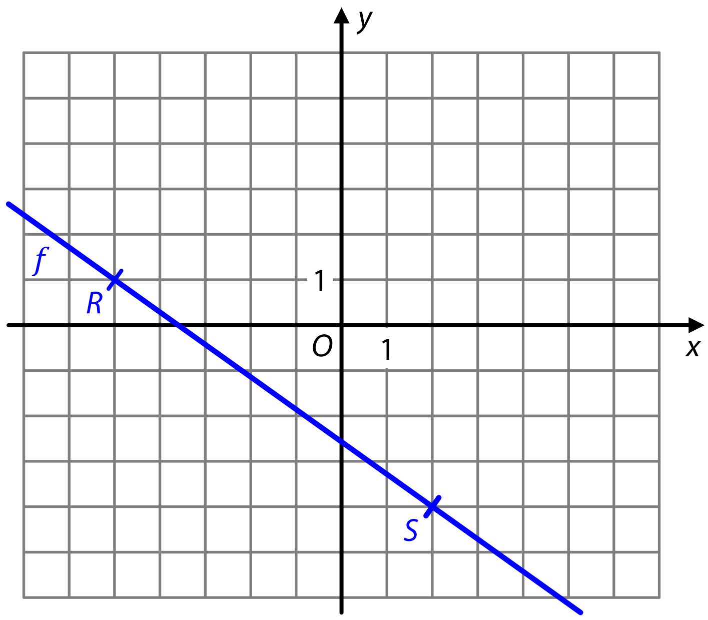
V kartézské soustavě souřadnic Oxy získáme graf funkce h posunutím grafu nepřímé úměrnosti $h_0: y = \dfrac{3}{x}$ o 2 jednotky ve směru kladné poloosy x a o 4 jednotky ve směru záporné poloosy y.

Hyperbola, která je grafem funkce h_0, má střed v počátku $O[0; 0]$.
Střed posunuté hyperboly, která je grafem funkce h, má tedy souřadnice $\boldsymbol{S[2; -4]}$.

8.2 V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* sestrojte graf lineární funkce f.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOHÁM 9–10

Pro $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce:

$$g: y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

(CZVV)

1 bod

9 Vypočtěte obě souřadnice průsečíku P grafu funkce g se souřadnicovou osou y.

Řešení:

Rovnice souřadnicové osy y: $x = 0$

P: $x = 0$

$$y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$x = 0$$

$$y = \sin\left(0 + \frac{7\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6}$$

$$x = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{P\left[0; -\frac{1}{2}\right]}$

max. 2 body

10 Určete <u>nejmenší kladné</u> číslo x, pro které platí:

$$\sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 1$$

Řešení:

Hledané číslo x je nejmenším kladným řešením uvedené rovnice.

Nejprve najdeme všechna řešení rovnice v oboru $\mathbf{R}$:

$$\sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 1$$

$$x + \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}$$

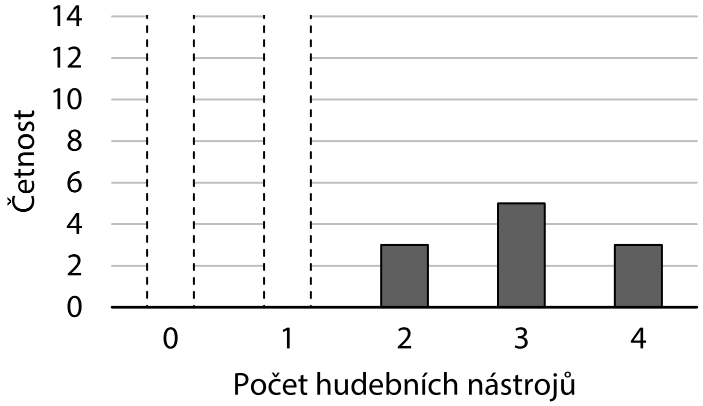
Nejmenší kladné řešení rovnice získáme pro $k = 1$:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$$

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOHÁM 11–12

Do třídy 6. A chodí 25 žáků.
Každý z nich uvedl počet hudebních nástrojů, na které hraje.
V grafu četností hodnot tohoto znaku právě dvě četnosti chybí (počet žáků, kteří nehrají na žádný hudební nástroj, a počet žáků, kteří hrají pouze na jeden hudební nástroj).

Chybějící četnosti se vzájemně liší o 10.
Modus počtu hudebních nástrojů je 0.

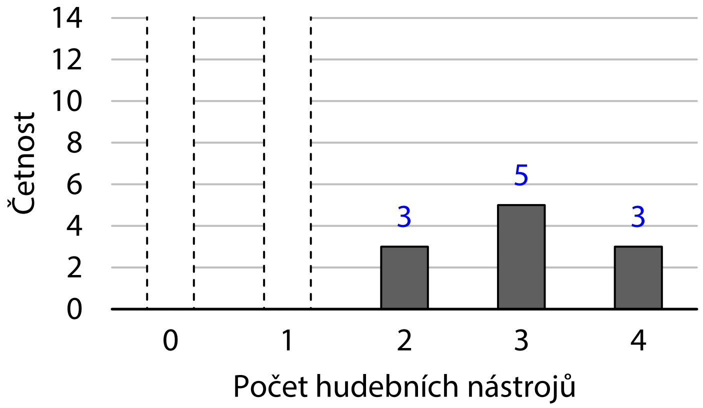


(*CZVV*)

1 bod

11 Určete medián počtu hudebních nástrojů, na které hraje žák třídy 6. A.

Řešení:



Statistický znak – počet hudebních nástrojů, na které hraje žák třídy 6. A – označíme x.
Z grafu získáme četnosti $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ a $n_4 = 3$ hodnot tohoto znaku.
Protože $\mathrm{Mod}(x) = 0$, pro chybějící četnosti platí $n_0 > n_1$, a tedy $n_0 - n_1 = 10$.

Celkový počet žáků:
$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 25$$
$$n_0 + n_1 + 3 + 5 + 3 = 25$$
$$n_0 + n_1 = 14$$

Vypočteme chybějící četnosti:

$$n_0 - n_1 = 10$$
$$\underline{n_0 + n_1 = 14}$$
$$n_0 = 12$$
$$n_1 = 2$$

$$\mathrm{Med}(x) = x_{\frac{25+1}{2}} = x_{13} = \mathbf{1}$$

1 bod

12 Určete aritmetický průměr počtu hudebních nástrojů, na které hraje žák třídy 6. A. Výsledek nezaokrouhlujte.

Řešení:

Užijeme hodnot vypočtených v řešení úlohy 11, tj. $n_0 = 12$, $n_1 = 2$.

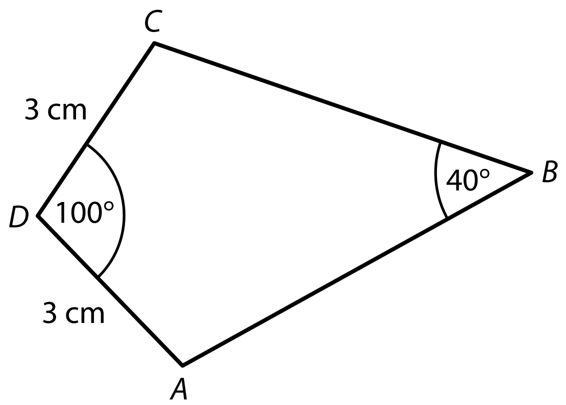
$$\bar{x} = \frac{n_0 \cdot 0 + n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 3 + n_4 \cdot 4}{n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{25} = \frac{35}{25} = \mathbf{1{,}4}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Čtyřúhelník *ABCD* se skládá ze dvou shodných trojúhelníků *ABD* a *CBD*.

Platí: $|AD| = |CD| = 3$ cm, $|\sphericalangle ADC| = 100°$, $|\sphericalangle ABC| = 40°$.



(*CZVV*)

max. 3 body

13 Vypočtěte v cm délku úhlopříčky

13.1 *AC*,

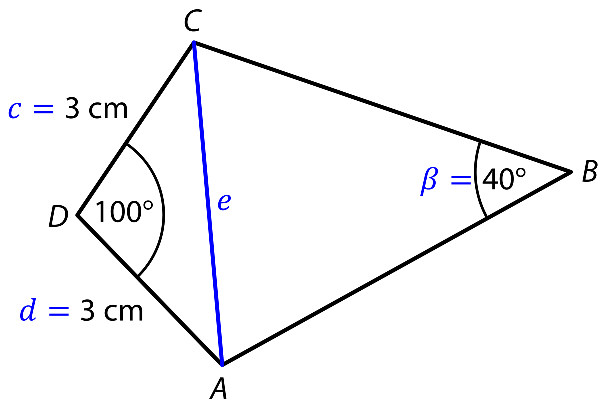
13.2 *BD*.

Výsledky zaokrouhlete na desetiny cm.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

Řešení:

Ve čtyřúhelníku *ABCD* známe délky stran $c = 3$ cm, $d = 3$ cm a velikosti vnitřních úhlů $\beta = 40°$ a $\delta = 100°$.



13.1 Délku úhlopříčky *AC* označíme e. Podle kosinové věty v trojúhelníku *ACD* platí:

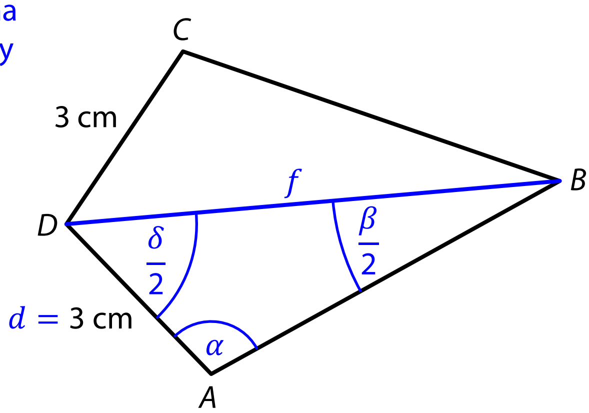
$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\delta$$

$$e = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\delta}$$

$$e = \sqrt{3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 100°} \text{ cm}$$

$$e \doteq 4{,}6 \text{ cm}$$

13.2 Úhlopříčka *BD* dělí čtyřúhelník *ABCD* na shodné trojúhelníky *ABD* a *CBD*, je tedy osou vnitřních úhlů *ABC* i *ADC* čtyřúhelníku *ABCD*.



V trojúhelníku *ABD* tedy platí:

$$|AD| = d = 3\text{ cm}$$

$$|\sphericalangle ABD| = \frac{\beta}{2}$$

$$|\sphericalangle ADB| = \frac{\delta}{2}$$

Pro velikost α vnitřního úhlu při vrcholu *A* potom platí:

$$\alpha = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 180° - \left(\frac{40°}{2} + \frac{100°}{2}\right) = 110°$$

Délku úhlopříčky *BD* označíme f.

Podle sinové věty v trojúhelníku *ABD* platí:

$$\frac{f}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$f = \frac{d \cdot \sin\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{3\text{ cm} \cdot \sin 110°}{\sin\frac{40°}{2}} = \frac{3\text{ cm} \cdot \sin 110°}{\sin 20°} \doteq 8{,}2\text{ cm}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Pro třídenní propagační akci byly vydány poukazy na jeden volný vstup do aquacentra.

První den akce byly využity dvě pětiny všech vydaných poukazů.
Každý další den akce bylo využito o 15 poukazů méně než v předchozím dni.

Během celé třídenní akce **nebyla** využita pouze jedna dvacetina všech vydaných poukazů.

(CZVV)

max. 3 body

14 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtěte, kolik vydaných poukazů bylo využito druhý den propagační akce.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

Celkový počet vydaných poukazů označíme x.

Počet poukazů využitých během akce				Počet nevyužitých poukazů	Součet (tj. celkový počet poukazů)
1. den	2. den	3. den	celkem		
$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{5}x - 15$	$\frac{2}{5}x - 30$	$\frac{6}{5}x - 45$ $\left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x - 15 + \frac{2}{5}x - 30\right)$	$\frac{1}{20}x$	$\frac{5}{4}x - 45$ $\left(\frac{6}{5}x - 45 + \frac{1}{20}x\right)$

V posledním sloupci tabulky je uveden celkový počet vydaných poukazů, tedy platí:

$$\frac{5}{4}x - 45 = x$$

$$\frac{1}{4}x = 45$$

$$x = 180$$

Počet poukazů využitých 2. den akce: $\frac{2}{5}x - 15 = \frac{2}{5} \cdot 180 - 15 = 57$

Druhý den propagační akce bylo využito 57 vydaných poukazů.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je dána přímka

$$p\colon x = 2 + 2t,$$
$$y = 1 - 4t, \quad t \in \mathbf{R}$$

(CZVV)

max. 3 body

15 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
15.1	Přímka p prochází bodem $M[3; -1]$.	☒	☐
15.2	Vektor $\vec{u} = (2; 1)$ je směrovým vektorem přímky p.	☐	☒
15.3	Přímka p je kolmá k přímce q: $2x + y = 0$.	☐	☒

Řešení:

15.1 Aby bod $M[3; -1]$ ležel na přímce p, musí existovat $t \in \mathbf{R}$, pro které platí:

$$3 = 2 + 2t$$
$$-1 = 1 - 4t$$

Z obou rovnic získáme stejné řešení $t = 0{,}5$, tvrzení 15.1 je tedy **pravdivé**.

15.2 Jeden ze směrových vektorů přímky p je $\vec{s}_p = (2; -4)$.

Vektor $\vec{u} = (2; 1)$ není násobkem vektoru $\vec{s}_p$, tvrzení 15.2 je tedy **nepravdivé**.

15.3 Aby byla přímka p kolmá na přímku q, musí být směrový vektor $\vec{s}_p = (2; -4)$ přímky p násobkem normálového vektoru $\vec{n}_q = (2; 1)$ přímky q.

Uvedená podmínka neplatí, tvrzení 15.3 je tedy **nepravdivé**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Rada sportovního klubu má 11 členů, z nichž právě tři obsadí funkce předsedy, místopředsedy a hospodáře.

Kandidaturu na funkci předsedy i na funkci místopředsedy přijalo všech 11 členů rady, ale pouze 6 z nich přijalo i kandidaturu na funkci hospodáře.

(*CZVV*)

2 body

16 Kolika způsoby lze všechny tři funkce obsadit?

A) 440 způsoby

B) 540 způsoby

C) 660 způsoby

D) 1 440 způsoby

E) jiným počtem způsobů

Řešení:

Při výpočtu obsadíme nejprve funkci hospodáře.

Pro volbu osoby, která obsadí funkci hospodáře, máme 6 možností.
Ke každému již zvolenému hospodáři máme 10 možností pro volbu předsedy, neboť jeden z 11 členů rady již obsadil funkci hospodáře.
Pro volbu místopředsedy zbývá 9 možností.

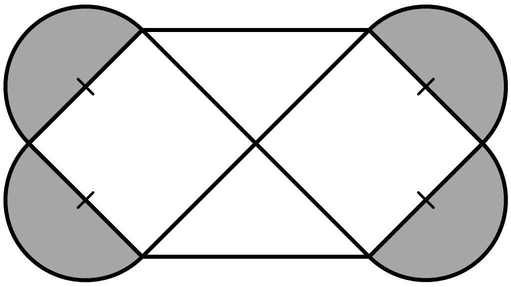
Počet způsobů, jak obsadit všechny tři funkce: $6 \cdot 10 \cdot 9 = 540$
(Užili jsme kombinatorického pravidla součinu.)

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Obrazec obsahuje čtyři tmavé půlkruhy a bílý šestiúhelník, který se skládá ze dvou shodných čtverců a dvou shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Celkový obsah tmavých částí obrazce je 32π cm^2.

(Průměrem každého půlkruhu je strana čtverce.)



(*CZVV*)

2 body

17 Jaký je obsah bílého šestiúhelníku?

A) 48 cm^2

B) 96 cm^2

C) 128 cm^2

D) 183 cm^2

E) 192 cm^2

Řešení:

Délku strany bílého čtverce a zároveň průměr šedého půlkruhu označíme a.
Poloměr šedého půlkruhu označíme r, platí tedy $a = 2r$.

Celkový obsah tmavých částí S_T je stejný jako součet obsahů dvou kruhů o poloměru r:
$S_T = 2 \cdot \pi r^2, \qquad S_T = 32\pi \text{ cm}^2$

Obsah bílého šestiúhelníku S_B je stejný jako součet obsahů tří čtverců o straně délky a:
$S_B = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot (2r)^2 = 12r^2$

Ze vztahu pro S_T vyjádříme r^2 a dosadíme do vztahu pro S_B:

$$r^2 = \frac{S_T}{2\pi}$$

$$S_B = 12r^2 = 12 \cdot \frac{S_T}{2\pi} = 6 \cdot \frac{S_T}{\pi} = 6 \cdot \frac{32\pi \text{ cm}^2}{\pi} = 192 \text{ cm}^2$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

Vnitřní prostor konvičky na mléko má tvar rotačního válce s podstavou o průměru 6 cm.

Vnitřní prostor kalíšku, který je zcela zaplněn mlékem do kávy, má tvar rotačního válce s podstavou o průměru 2,4 cm a výškou 1,5 cm.

Všechno mléko z kalíšku jsme přilili do konvičky s mlékem.
(Konvička nebyla nakloněna, mléko nepřeteklo.)

(*CZVV*)

2 body

18 O kolik stoupla hladina v konvičce po přilití mléka z kalíšku?

A) o méně než 0,24 cm

B) o 0,24 cm

C) o 0,68 cm

D) o 0,72 cm

E) o více než 0,72 cm

Řešení:

Ve válci představujícím vnitřní prostor kalíšku označíme poloměr podstavy r a průměr d, výšku válce v a objem válce V.
Ve válci představujícím vnitřní prostor konvičky označíme poloměr podstavy R a průměr D.

Platí:

$$r = \frac{d}{2}, \qquad d = 2{,}4\ \text{cm}, \qquad v = 1{,}5\ \text{cm}$$

$$R = \frac{D}{2}, \qquad D = 6\ \text{cm}$$

Přilité mléko vytvoří ve vnitřním prostoru konvičky rotační válec s podstavou o poloměru R a s objemem V. Výška h tohoto válce odpovídá vzestupu hladiny.

Pro objem mléka z kalíšku tedy platí:

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot v = \frac{1}{4}\pi d^2 v$$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{4}\pi D^2 h$$

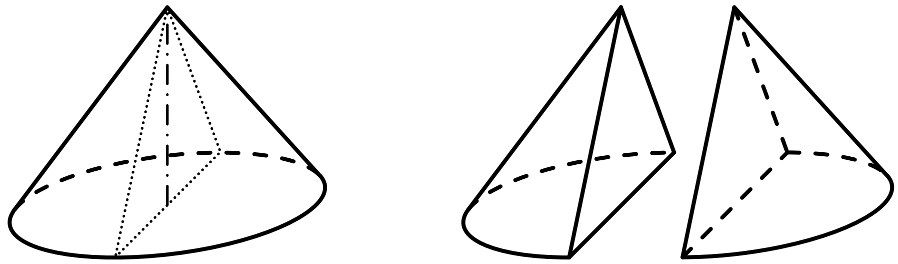
Z rovnosti objemů vyjádříme a vypočteme vzestup hladiny h:

$$\frac{1}{4}\pi D^2 h = \frac{1}{4}\pi d^2 v$$

$$h = \frac{d^2 v}{D^2} = \frac{2{,}4^2 \cdot 1{,}5}{6^2}\ \text{cm} = 0{,}24\ \text{cm}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Dřevěný rotační kužel s podstavou o poloměru 12 cm a výškou 16 cm jsme osovým řezem rozdělili na dva shodné půlkužele.



(CZVV)

2 body

19 **Jaký je povrch <u>jednoho</u> půlkužele?**

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2.

A) 603 cm^2

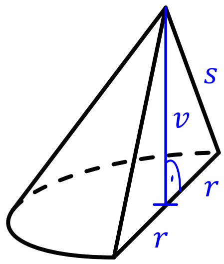
B) 720 cm^2

C) 795 cm^2

D) 1 206 cm^2

E) jiný povrch

Řešení:



V kuželi označíme poloměr podstavy r, výšku v a délku strany s.

Platí: $r = 12$ cm, $v = 16$ cm

Délka strany kužele: $s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{12^2 + 16^2}$ cm $= 20$ cm

Povrch jednoho půlkužele se skládá z poloviny povrchu celého kužele a obsahu rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna má délku $2r$ a velikost výšky na základnu je v.

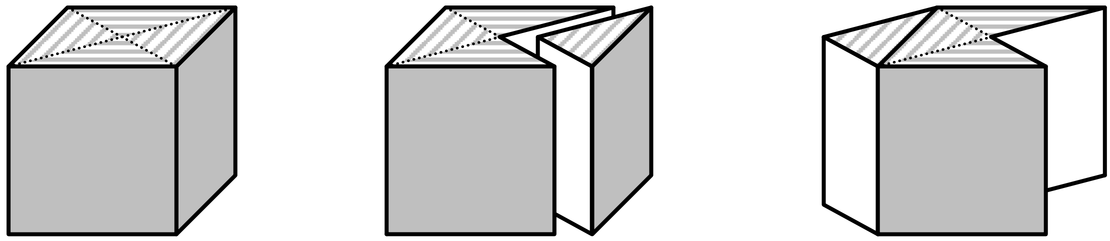
Pro povrch půlkužele platí:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi r(r + s) + \frac{2r \cdot v}{2} = \frac{\pi}{2} r(r + s) + rv$$

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot 12 \cdot (12 + 20)\ \text{cm}^2 + 12 \cdot 16\ \text{cm}^2 = (192\pi + 192)\ \text{cm}^2 \doteq 795\ \text{cm}^2$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Z krychle s hranou délky 4 cm byl dvěma úhlopříčnými svislými řezy oddělen trojboký hranol, který tvoří čtvrtinu krychle. Oddělený hranol se přemístil tak, aby jeho čtvercová stěna splynula s protější stěnou krychle. Vzniklo tak nové těleso.



(*CZVV*)

2 body

20 Jaký je povrch nového tělesa?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm^2.

A) $109\ cm^2$

B) $128\ cm^2$

C) $135\ cm^2$

D) $155\ cm^2$

E) jiný povrch

Řešení:

Délku hrany krychle označíme a, přičemž $a = 4$ cm.

Hranice nového tělesa se skládá ze dvou čtvercových stěn o obsahu a^2 (přední a zadní), dvou šestiúhelníkových stěn (podstavy), z nichž každá má rovněž obsah a^2,
a čtyř shodných obdélníkových stěn (dvě vlevo a dvě vpravo). Kratší strana obdélníkové stěny je polovinou úhlopříčky čtvercové stěny krychle, delší strana je hranou krychle.

Pro povrch S nového tělesa tedy platí:

$$S = 2a^2 + 2a^2 + 4 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\right) = 4a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = 4a^2 + 2a^2\sqrt{2} = 2a^2 \cdot (2 + \sqrt{2})$$

$$S = 2 \cdot 4^2 \cdot (2 + \sqrt{2})\ \text{cm}^2 = 32 \cdot (2 + \sqrt{2})\ \text{cm}^2 \doteq 109\ \text{cm}^2$$

2 body

21 **Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru R interval** $(7; +\infty)$**?**

A) $7 - x > 0$

B) $(x-7)^2 > 0$

C) $x^2 - 49 > 0$

D) $\dfrac{(x-1)^2}{x-7} > 0$

E) $\dfrac{x-7}{x-1} > 0$

Řešení:

A) $7 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 7, \quad K_A = (-\infty; 7)$

B) $(x-7)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 7 \neq 0, \quad K_B = \mathbf{R} \setminus \{7\}$

C) $x^2 - 49 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+7)(x-7) > 0, \quad K_C = (-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$

D) $\dfrac{(x-1)^2}{x-7} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \neq 0 \;\wedge\; x > 7, \quad \mathbf{K_D} = (7; +\infty)$

E) $\dfrac{x-7}{x-1} < 0, \quad K_E = (-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22

Jsou uvedeny úpravy tří výrazů:

I. $\frac{a^{8n}}{a^{2n}} = \cdots = a^4$

II. $a^n \cdot \frac{a}{a^{-2}} = \cdots = a^{n+3}$

III. $(a^{8n})^2 = \cdots = a^{64n^2}$

(CZVV)

2 body

22 Který výraz byl upraven správně pro každé $a \in (0; +\infty)$ a každé $n \in$ N?

A) Správně byly upraveny alespoň dva ze tří výrazů.

B) pouze **I.**

C) pouze **II.**

D) pouze **III.**

E) Správně nebyl upraven žádný ze tří výrazů.

Řešení:

I.

$$\frac{a^{8n}}{a^{2n}} = a^{8n-2n} = a^{6n} \neq a^4$$

II.

$$a^n \cdot \frac{a}{a^{-2}} = a^n \cdot a^{1-(-2)} = a^n \cdot a^3 = a^{n+3}$$

III.

$$(a^{8n})^2 = a^{8n \cdot 2} = a^{16n} \neq a^{64n^2}$$

Správně byl upraven pouze výraz **II.**

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

V osudí je 6 černých míčků a 4 bílé míčky. Náhodně vytáhneme dvojici míčků.

(*CZVV*)

2 body

23 Jaká je pravděpodobnost, že oba dva vytažené míčky budou mít stejnou barvu?

A) $\frac{7}{15}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

Řešení:

Počet všech možností, jak z osudí vytáhnout dvojici míčků: $\binom{10}{2}$

Aby měly oba dva vytažené míčky stejnou barvu (jev označíme S), musejí být buď oba černé, nebo oba bílé, přičemž tyto dvě možnosti se navzájem vylučují.

Počet možností, jak z osudí vytáhnout dva ze 6 černých míčků, nebo dva ze 4 bílých míčků, tj. počet výsledků příznivých jevu S: $\binom{6}{2} + \binom{4}{2}$

Pravděpodobnost jevu S: $\frac{\binom{6}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15 + 6}{45} = \frac{7}{15}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Firma svým britským pracovníkům poskytla příplatek na bydlení 1,2 libry na čtvereční yard. Českým pracovníkům firma poskytla odpovídající příplatek v korunách na čtvereční metr, a to s využitím následujících převodů:

1 £ = 29,6 Kč
1 yd = 91,44 cm

(CZVV)

2 body

24 V jaké výši poskytla firma příplatek na bydlení českým pracovníkům?
Přesně vypočtená hodnota je zaokrouhlena na desetiny.

A) 29,7 Kč na 1 m^2

B) 30,9 Kč na 1 m^2

C) 32,4 Kč na 1 m^2

D) 38,8 Kč na 1 m^2

E) 42,5 Kč na 1 m^2

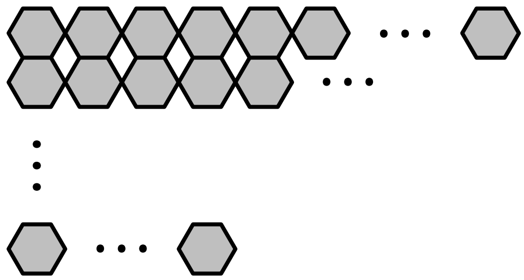
Řešení:

Dle uvedených převodů pro příplatek na bydlení platí:

$$1{,}2\ \frac{£}{\mathrm{yd}^2} = 1{,}2 \cdot \frac{29{,}6\ \mathrm{Kč}}{(91{,}44\ \mathrm{cm})^2} = \frac{35{,}52\ \mathrm{Kč}}{(0{,}914\,4\ \mathrm{m})^2} = \frac{35{,}52}{0{,}914\,4^2}\ \frac{\mathrm{Kč}}{\mathrm{m}^2} \doteq 42{,}5\ \frac{\mathrm{Kč}}{\mathrm{m}^2}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 25

Dvě různé mozaiky jsou sestaveny z několika řad shodných šestiúhelníků.



25.1 První mozaika obsahuje 10 řad.
Nejvíce šestiúhelníků je v horní řadě. V každé další řadě je o polovinu méně šestiúhelníků než v řadě nad ní.
Ve třetí řadě **zdola** je 36 šestiúhelníků.

25.2 Druhá mozaika obsahuje lichý počet řad.
Nejvíce šestiúhelníků je v horní řadě. V každé další řadě je o 15 šestiúhelníků méně než v řadě nad ní. Nejméně šestiúhelníků je tedy ve spodní řadě.
V prostřední řadě je 260 šestiúhelníků a ve spodní řadě 140 šestiúhelníků.

(*CZVV*)

max. 4 body

25 Ke každé otázce (25.1–25.2) přiřaďte správnou odpověď (A–F).

25.1 Kolik šestiúhelníků je v horní řadě první mozaiky? D

25.2 Kolik šestiúhelníků dohromady obsahuje druhá mozaika? C

A) méně než 4 000

B) 4 096

C) 4 420

D) 4 608

E) 4 680

F) více než 4 700

Řešení:

25.1 Počty šestiúhelníků v jednotlivých řadách první mozaiky (shora dolů) tvoří konečnou geometrickou posloupnost $(g_k)_{k=1}^{10}$, která má 10 členů a kvocient $q = 0{,}5$.
Počet šestiúhelníků v horní řadě mozaiky je g_1, ve třetí řadě zdola potom $g_8 = 36$.

Hledáme první člen posloupnosti, v níž platí $g_k = g_1 \cdot q^{k-1}$. Pro $k = 8$ dostaneme:

$$g_8 = g_1 \cdot q^{8-1}$$

$$g_1 = \frac{g_8}{q^7} = \frac{36}{0{,}5^7} = 4\,608$$

25.2 Počet řad druhé mozaiky označíme n.
Počty šestiúhelníků v jednotlivých řadách druhé mozaiky (shora dolů) tvoří konečnou aritmetickou posloupnost $(a_k)_{k=1}^{n}$, která má n členů a diferenci $d = -15$.
Počet šestiúhelníků ve spodní řadě je $a_n = 140$ (a_n je poslední člen posloupnosti).
Počet šestiúhelníků v prostřední řadě označíme a_p, přičemž $a_p = 260$.

Posloupnost má lichý počet členů, rozdíl mezi posledním a prostředním členem je proto stejný jako rozdíl mezi prostředním a prvním členem, tedy platí:

$$a_n - a_p = a_p - a_1$$
$$a_1 = 2a_p - a_n = 2 \cdot 260 - 140 = 380$$

Určíme n (počet všech členů posloupnosti):

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d}$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{140 - 380}{-15} + 1 = 17$$

Hledáme součet s_n všech členů posloupnosti (počet všech šestiúhelníků v mozaice):

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$
$$s_{17} = \frac{17}{2} \cdot (380 + 140) = 4\,420$$

případně

Posloupnost má lichý počet členů, prostřední člen má tedy pořadí $p = \frac{n+1}{2}$ a platí:

$$a_n = a_p + (n - p) \cdot d, \qquad a_p = a_{\frac{n+1}{2}} = 260$$
$$a_n = a_{\frac{n+1}{2}} + \left(n - \frac{n+1}{2}\right) \cdot d$$
$$a_n - a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{n-1}{2} \cdot d$$
$$n - 1 = \left(a_n - a_{\frac{n+1}{2}}\right) \cdot \frac{2}{d}$$
$$n = \left(a_n - a_{\frac{n+1}{2}}\right) \cdot \frac{2}{d} + 1 = (140 - 260) \cdot \frac{2}{-15} + 1 = 17$$

V posloupnosti určíme první člen a_1 a součet s_n všech jejích členů:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \qquad a_n = 140$$
$$a_1 = a_n - (n-1) \cdot d$$
$$a_1 = 140 - (17 - 1) \cdot (-15) = 380$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$
$$s_{17} = \frac{17}{2} \cdot (380 + 140) = 4\,420$$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.