

MATEMATYKA ROZSZERZAJĄCA

MXMVD24P0T01

TEST DYDAKTYCZNY

Maksymalna ilość punktów: 50

Próg zaliczenia: 33%

1 Podstawowe informacje dotyczące zadań

- **Test dydaktyczny** zawiera **22 zadania**.
- **Czas pracy** oznaczono w **kartach odpowiedzi**.
- **W czasie pracy można korzystać tylko z:** przyborów do pisania i rysowania, „Tablic matematyczno-fizyczno-chemicznych” i prostego kalkulatora bez karty graficznej, nieposiadającego funkcji rozwiązywania równań i przekształcania wyrażeń algebraicznych. Nie można używać kalkulatora programowalnego.
- Obok każdego zadania umieszczono maks. ilość punktów.
- Odpowiedzi wpisuj do karty odpowiedzi.
- **Niejednoznaczny lub nieczytelny zapis zostanie uznany za błędny.**
- Notować można w arkuszu zadań, notatki nie zostaną ocenione.
- Pierwszą część testu dydaktycznego (zadania 1–11) tworzą **zadania otwarte**.
- W drugiej części testu dydaktycznego (zadania 12–22) zawarte są zadania zamknięte z wyborem odpowiedzi. We wszystkich zadaniach /lub ich częściach/ **tylko jedna odpowiedź jest poprawna**.
- Za brak rozwiązania lub nieprawidłowe rozwiązanie całego zadania **nie przydziela się punktów ujemnych**.

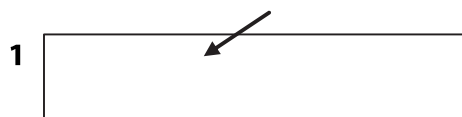
2 Zasady poprawnego zapisu odpowiedzi

- Pisz długopisem z **niebieskim lub czarnym wkładem**. Pisz **wyraźnie, czytelnie, uważaj, by długopis nie przerywał**.
- O ile będziesz rysować zwykłym ołówkiem, pogrub wszystko długopisem.

- Ocenione zostaną **tylko odpowiedzi umieszczone w karcie odpowiedzi**.

2.1 Wskazówki do zadań otwartych

- Wyniki **wpisuj czytelnie** do wyznaczonych białych pól.



- Jeżeli wymagane jest całe rozwiązanie, przedstaw, oprócz wyniku, cały przebieg rozwiązania. Jeżeli podasz tylko wynik, to nie otrzymasz za to zadanie żadnych punktów.
- **Zapisy obok wyznaczonych białych pól nie zostaną ocenione.**
- Błędny zapis przekreśl i zapisz nowe rozwiązanie.

2.2 Wskazówki do zadań zamkniętych

- Poprawną odpowiedź oznacz wyraźnie krzyżykiem w białym polu na karcie odpowiedzi, wg rysunku – dokładnie.



- Jeżeli chcesz zmienić odpowiedź, starannie zakoloruj oznaczone pole, zaś wybraną odpowiedź oznacz krzyżykiem w nowym polu.



- Jakikolwiek inny sposób wpisywania odpowiedzi i wnoszenia poprawek uznany zostanie za odpowiedź błędną.

NIE OTWIERAJ ARKUSZA ZADAŃ, POCZEKAJ NA DECYZJĘ OSOBY NADZORUJĄCEJ!

1 punkt

- 1 Uprość wyrażenie dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$:

$$\frac{(5x-1)^{-2}}{(1-5x)^{-3}} - 1 =$$

1 punkt

- 2 Podano wyrażenie dla wszystkich dopuszczalnych wartości zmiennej x .

$$\frac{3x^2 + 11x - 4}{3x^2 - 10x + 3}$$

Określ wszystkie wartości x , dla których wartość podanego wyrażenia jest równa zero.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 3

Biuro podróży wykupiło wszystkie miejsca w hotelu po jednolitej cenie.

Cena jednego miejsca w czasie zakupu była o 60 % niższa niż cena, za którą biuro potem miejsca sprzedawało.

Biuro tym sezonie sprzedawało tylko 80 % wszystkich wykupionych miejsc.

1 punkt

- 3 Oblicz, o ile procent więcej zarobiło biuro podróży na sprzedanych miejscach niż zapłaciło za wykupienie wszystkich miejsc hotelowych.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 4

Długopis kosztował p koron, następnie potaniał o $2p$ procent ($p \in \mathbf{N}$), więc teraz kosztuje 12 koron.

maks. 2 punkty

- 4** **Określ, ile koron mógł kosztować długopis przed zniżką.**

Znajdź wszystkie rozwiązania.

maks. 2 punkty

- 5** Podano równanie z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbf{R}$:

$$\frac{2x + m + 1}{x - 1} = m$$

Określ wszystkie wartości parametru m , dla których podane równanie ma właśnie jedno rozwiązanie w zbiorze $\mathbf{R}$.

Zapisz w karcie odpowiedzi cały przebieg rozwiązania.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 6

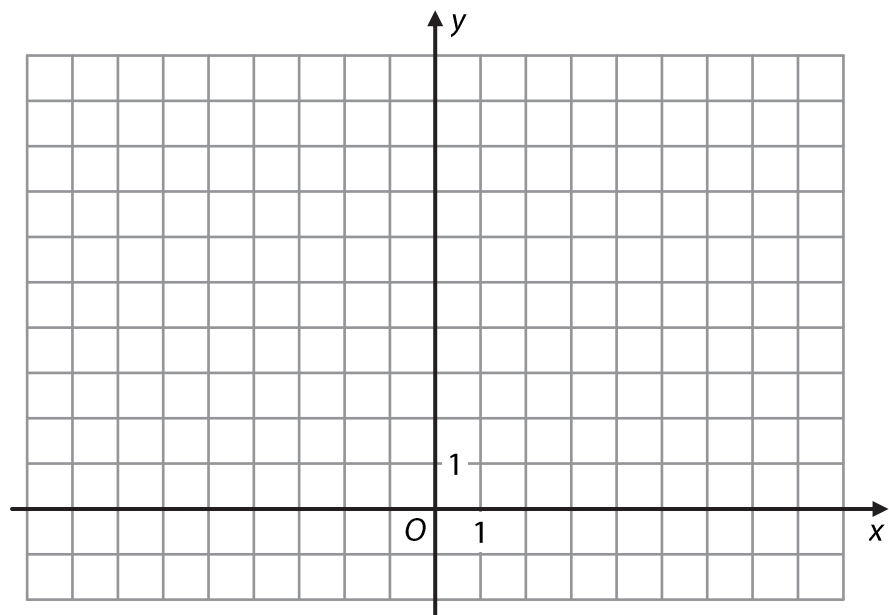
Dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$

podano trzy funkcje:

$$f_1(x) = 4 + \frac{x}{2}$$

$$f_2(x) = 6 - \frac{x}{2}$$

$$f_3(x) = 4 - x$$



maks. 2 punkty

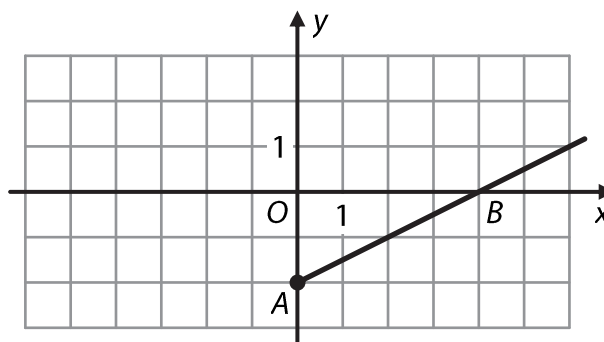
- 6** Dla niektórych liczb a obowiązuje, że wartości funkcji $f_1(a)$, $f_2(a)$ a $f_3(a)$ są liczbami **całkowitymi, dodatnimi** i wzajemnie **różnymi**.

Określ wszystkie **takie** liczby a .

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 7

W kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy podano półprostą AB , którą przedstawia **część** wykresu funkcji **parzystej** g .

Punkty A, B to punkty węzłowe.



maks. 2 punkty

7

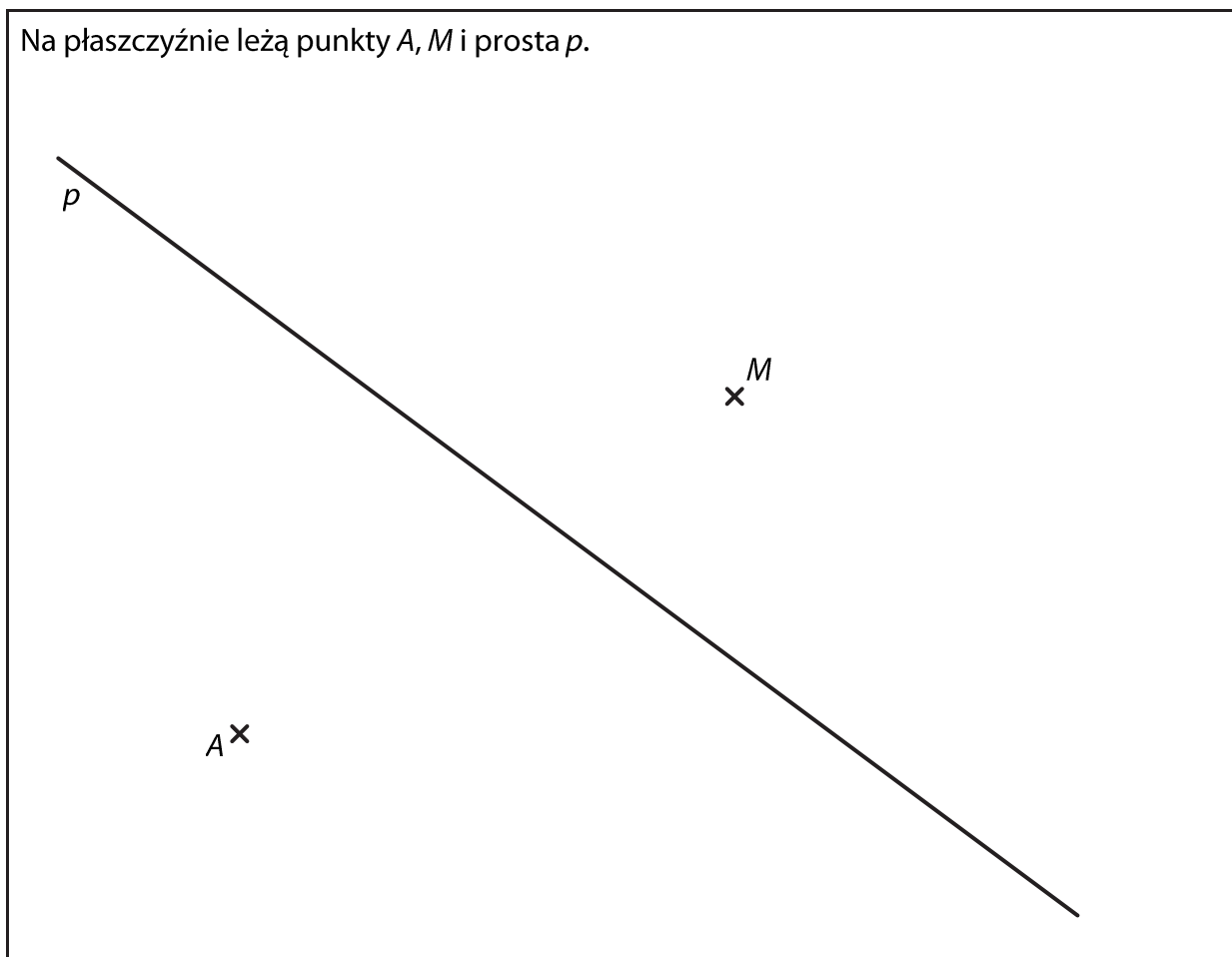
7.1 Zapisz równanie funkcji g .

7.2 Narysuj wykres funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy .

W karcie odpowiedzi pogrub wszystko **długopisem.**

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 8

Na płaszczyźnie leżą punkty A , M i prosta p .



maks. 3 punkty

- 8** Punkt A to wierzchołek prostokąta $ABCD$.
Przekątna danego prostokąta leży na prostej p .
Punkt M leży na brzegu prostokąta $ABCD$.

- 8.1 Odnajdujesz wierzchołki B , C , D prostokąta $ABCD$.
Wykonaj szkic prostokąta $ABCD$ i zapisz analizę lub przebieg konstrukcji.

- 8.2 Skonstruuj w rysunku brakujące wierzchołki B , C , D i narysuj prostokąt $ABCD$.
Znajdź wszystkie rozwiązania.

W karcie odpowiedzi pogrub wszystko *długopisem*.

maks. 3 punkty

9 W rombie stosunek długości boku do długości wysokości wynosi $5 : 3$.

Określ stosunek długości obu przekątnych danego rombu.

Zapisz w karcie odpowiedzi **cały przebieg rozwiązania**.

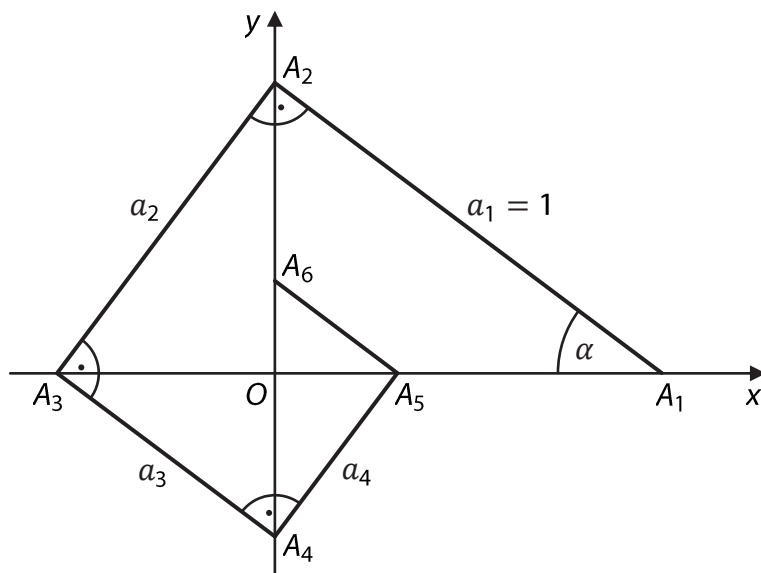
TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 10

W kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy jest na osiach współrzędnych nieskończenie wiele punktów $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$

Dla punktów A_1, A_2 obowiązuje: $|A_1A_2| = 1$, $|\sphericalangle A_2A_1O| = \alpha$, gdzie $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

Kąt $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ jest dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ kątem prostym.

Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ oznaczmy a_n odległość punktów A_n, A_{n+1} (dla $a_1 = |A_1A_2| = 1$).



maks. 4 punkty

10

10.1 **Wyraź** odległość a_n w zależności od $n \in \mathbf{N}$ i miary kąta α .

10.2 Nieskończona linia łamana $A_1A_2 \dots A_n \dots$ ma długość $\ell = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$.

Oblicz w stopniach miarę kąta α dla $\ell = 10$.

Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku dziesiętnym.

Zapisz w karcie odpowiedzi **cały przebieg rozwiązania** dla obu części zadania.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 11

Gra planszowa ma zawsze 90 rund i dowolnej rundzie gracz może rozpocząć wydobywanie ropy.

Jeżeli gracz rozpocznie wydobywać ropę w k -ej rundzie ($k \in \mathbf{N}$, $k \leq 90$), uzyska w danej rundzie k bareli ropy. W każdej następnej rundzie uzyska o k bareli ropy więcej niż w poprzedniej rundzie. W danej grze nie ma innego sposobu na wydobywanie ropy.

(Np.: gracz, który rozpocznie wydobywać ropę w 10. rundzie, uzyska w 10. rundzie 10 bareli ropy, w 11. rundzie potem 20 bareli, w 12. rundzie 30 bareli itd.)

maks. 4 punkty

11

11.1 **Oblicz**, ile bareli ropy uzyska gracz podczas całej gry, jeżeli rozpocznie wydobywać ropę w 85. rundzie.

11.2 **Wyraź** w postaci zależności od zmiennej k , ile bareli ropy uzyska gracz podczas całej gry, jeżeli rozpocznie wydobywać ropę w k -ej rundzie.

Zapisz w karcie odpowiedzi **cały przebieg rozwiązania**.

11.3 Dwóch graczy rozpoczęło wydobywać ropę w dwóch rundach następujących po sobie, jednak obaj zdobyli podczas całej gry taką samą liczbę bareli ropy.

Oblicz, ile bareli ropy zdobył jeden z obu graczy.

Zapisz w karcie odpowiedzi cały przebieg rozwiązania.

maks. 3 punkty

12 Każda funkcja określona jednym z podanych zapisów jest definiowana dla wszystkich dopuszczalnych wartości $x \in \mathbf{R}$

Przyporządkuj do każdego zapisu funkcji (12.1–12.3) odpowiedni zbiór wartości danej funkcji (A–F).

12.1 $y = -x^2 + 3$ _____

12.2 $y = -x^{-3} + 3$ _____

12.3 $y = x^{-4} + 3$ _____

A) $(3; +\infty)$

B) $\langle 3; +\infty)$

C) $(-\infty; 3)$

D) $(-\infty; 3]$

E) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

F) $\mathbf{R}$

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 13

W bębnie do losowania jest 12 takich samych piłeczek, każda jest oznaczona jedną liczbą naturalną. Żadne dwie piłeczki nie są oznaczone tak samo.

Wyciągamy z bębna losowo trzy liczby, tzn. wyciągamy po jednej kolejno trzy piłeczki i nie wkładamy je do zpowrotem.

maks. 3 punkty

13 Przyporządkuj do każdego zdarzenia (13.1–13.3) prawdopodobieństwo jego wystąpienia (A–F).

13.1 Wśród wylosowanych liczb jest najmniejsza z liczb z bębna. _____

13.2 Druga wylosowana liczba jest większa od pierwszej i równocześnie mniejsza od trzeciej wylosowanej liczby. _____

13.3 Trzecia wylosowana liczba jest najmniejsza lub największa wśród wylosowanych liczb. _____

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{12}$

F) inna wartość prawdopodobieństwa

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 14

W kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy podano punkt $P[-4; 3]$ oraz prostą $o: y = 0,25x$.

Przez punkt P przechodzi prosta p , która odwzorowuje się sama na siebie w symetrii osiowej względem osi o .

2 punkty

14 Które równanie jest równaniem prostej p ?

- A) $y = -0,25x + 2$
- B) $y = -4x - 13$
- C) $y = 0,25x + 4$
- D) $y = 4x + 19$
- E) żadne z podanych

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 15

W kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy podano punkty $M[4; -1]$, $N[8; 5]$.

Punkt Y leży na osi współrzędnych y i jego odległość od obu punktów M i N jest taka sama.

2 punkty

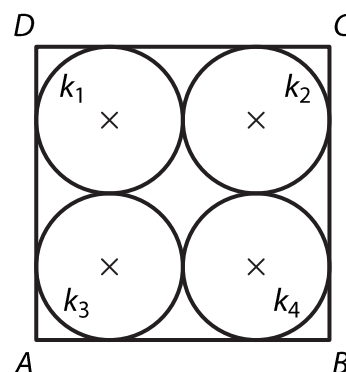
15 Ile wynosi pole trójkąta MNY ?

- A) 26
- B) $\sqrt{793}$
- C) 29
- D) $6\sqrt{26}$
- E) jiný obsah

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 16

W kwadracie $ABCD$ są cztery okręgi przystające k_1-k_4 , (patrz rysunek). Każdy okrąg jest styczny do dwóch boków kwadratu i do dwóch okręgów.

Kwadrat $ABCD$ leży w kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy tak, że obowiązuje: $B[5; -2]$, $D[-3; 6]$.



2 punkty

16 Które równanie jest równaniem okręgu k_1 ?

- A) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
- B) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$
- C) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
- D) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$
- E) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 17

W czasie 2. półrocza trzech uczniów poprawiło ocenę z fizyki o 1 stopień, a dwóch uczniów nawet o 2 stopnie w porównaniu z oceną za 1. półrocze. Reszta uczniów miała na końcu 1. i 2. półrocza z fizyki taką samą ocenę.

Średnia arytmetyczna ocen z fizyki w klasie na końcu 2. półrocza zmieniła się w porównaniu z 1. półroczem o jedną czwartą stopnia.

2 punkty

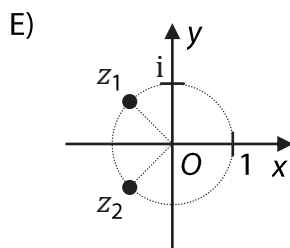
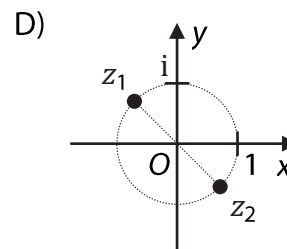
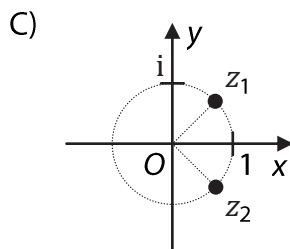
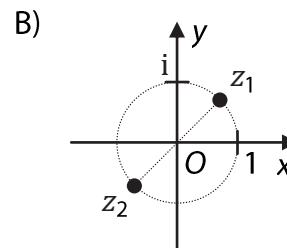
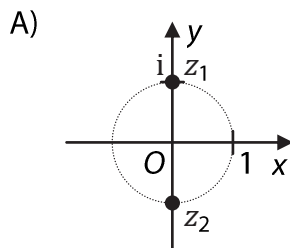
17 Ilu uczniów w klasie otrzymało na końcu 2. półrocza ocenę z fizyki?

- A) 20 uczniów
- B) 24 uczniów
- C) 28 uczniów
- D) 32 uczniów
- E) inna liczba uczniów

2 punkty

- 18 Na jednym z rysunków (A-F) przedstawiono na płaszczyźnie Gaussa obrazy liczb zespolonych z_1, z_2 , które są pierwiastkami równania $z^2 = -i$.

Na którym rysunku przedstawiono obrazy obu pierwiastków równania?



2 punkty

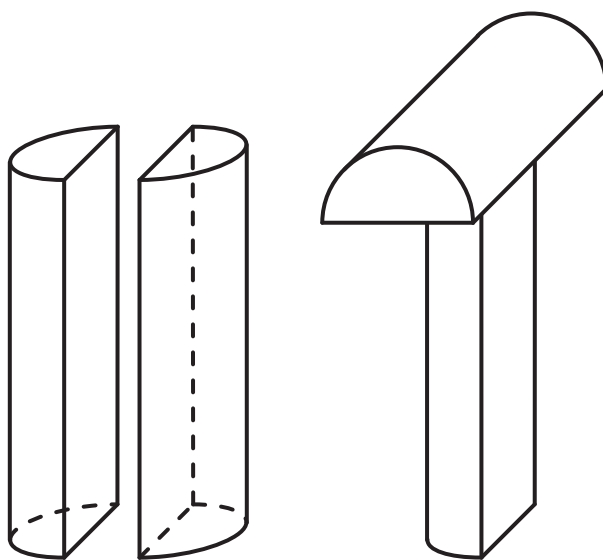
- 19 Dla którego z podanych układów nierówności jest zbiorem wszystkich rozwiązań w zbiorze $\mathbb{R}$ zbiór pusty?

- A) $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$
 B) $x^2 - 4x + 4 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 \leq 0$
 C) $(x + 5)^2 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$
 D) $x^2 + 4 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 \leq 0$
 E) $x^2 - 4 > 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 21

Drewniany wałek obrotowy o promieniu podstawy 3 cm i wysokości 14 cm przekrojono osiowo na dwie połowy.

Jedną połowę walca całą powierzchnią przekroju górnej podstawy przyklejono do powierzchni przekroju drugiej połowy (patrz rysunek).



2 punkty

21 Ile wynosi pole powierzchni sklejonej bryły?

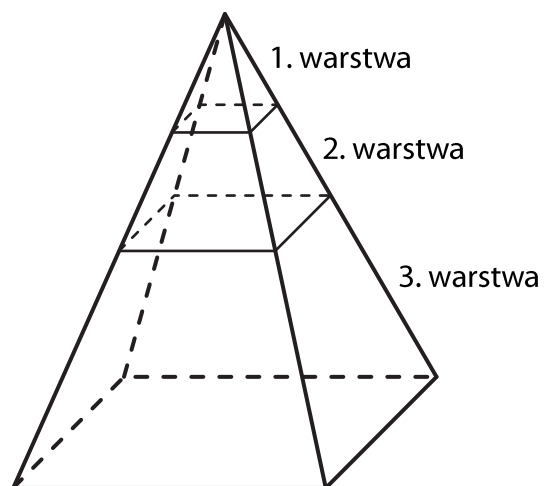
Wynik zaokrąglaj do całych cm^2 .

- A) 376 cm^2
- B) 396 cm^2
- C) 460 cm^2
- D) 474 cm^2
- E) inne pole powierzchni

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 22

Świeca w kształcie ostrosłupa składa się z trzech warstw o wzajemnie równoległych podstawach. (patrz rysunek).

Wysokość 2. warstwy jest taka sama, jak wysokość 1. warstwy, wysokość 3. Warstwy jest dwa razy większa niż wysokość 1. warstwy.



maks. 3 punkty

22 Oceń prawdziwość następujących zdań (22.1–22.3).

Zaznacz P - jeśli jest prawdziwe lub F - jeśli jest fałszywe.

- | | T | N |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 22.1 Stosunek objętości 1. warstwy do objętości całej świecy wynosi 1 : 64. | ☐ | ☐ |
| 22.2 Stosunek objętości 1. warstwy do objętości 2. warstwy wynosi 1 : 8. | ☐ | ☐ |
| 22.3 Stosunek objętości 2. warstwy do objętości 3. warstwy wynosi 1 : 8. | ☐ | ☐ |

SPRAWDŹ, CZY ZAPISAŁEŚ(AŚ) WSZYSTKIE ODPOWIEDZI W KARCIE ODPOWIEDZI.
