

MATEMATYKA ROZSZERZAJĄCA

MXMVD22P0T01

TEST DYDAKTYCZNY

Maksymalna ilość punktów: 50

Próg zaliczenia: 33%

1 Podstawowe informacje dotyczące zadań

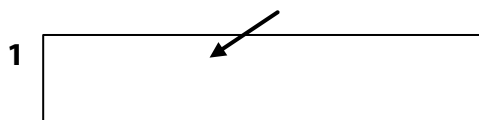
- **Test dydaktyczny zawiera 22 zadania.**
- **Czas pracy** oznaczono w kartach odpowiedzi.
- **W czasie pracy można korzystać tylko z:** przyborów do pisania i rysowania, „Tablic matematyczno-fizyczno-chemicznych” i prostego kalkulatora bez karty graficznej, nieposiadającego funkcji rozwiązywania równań i przekształcania wyrażeń algebraicznych. Nie można używać kalkulatora programowalnego.
- Obok każdego zadania umieszczono maks. ilość punktów.
- Odpowiedzi wpisuj do karty odpowiedzi.
- **Niejednoznaczny lub nieczytelny zapis zostanie uznany za błędny.**
- Notować można w arkuszu zadań, notatki nie zostaną ocenione.
- Pierwszą część testu dydaktycznego (zadania 1–11) tworzą **zadania otwarte**.
- W drugiej części testu dydaktycznego (zadania 12–22) zawarte są zadania zamknięte z wyborem odpowiedzi. We wszystkich zadaniach /lub ich częściach/ **tylko jedna odpowiedź jest poprawna**.
- Za brak rozwiązania lub nieprawidłowe rozwiązanie całego zadania **nie przydziela się punktów ujemnych**.

2 Zasady poprawnego zapisu odpowiedzi

- Pisz długopisem z **niebieskim lub czarnym wkładem**. Pisz **wyraźnie, czytelnie, uważaj, by długopis nie przerywał**.
- O ile będziesz rysować zwykłym ołówkiem, pogrub wszystko długopisem.
- Ocenione zostaną **tylko odpowiedzi umieszczone w karcie odpowiedzi**.

2.1 Wskazówki do zadań otwartych

- Wyniki **wpisuj czytelnie** do wyznaczonych białych pól.



- Jeżeli wymagane jest całe rozwiązanie, przedstaw, oprócz wyniku, cały przebieg rozwiązania. Jeżeli podasz tylko wynik, to nie otrzymasz za to zadanie żadnych punktów.
- **Zapisy obok wyznaczonych białych pól nie zostaną ocenione.**
- Błędny zapis przekreśl i zapisz nowe rozwiązanie.

2.2 Wskazówki do zadań zamkniętych

- Poprawną odpowiedź oznacz wyraźnie krzyżykiem w białym polu na karcie odpowiedzi, wg rysunku – dokładnie.



- Jeżeli chcesz zmienić odpowiedź, starannie zakoloruj oznaczone pole, zaś wybraną odpowiedź oznacz krzyżykiem w nowym polu.



- Jakikolwiek inny sposób wpisywania odpowiedzi i wnoszenia poprawek uznany zostanie za odpowiedź błędną.

NIE OTWIERAJ ARKUSZA ZADAŃ, POCZEKAJ NA DECYZJĘ OSOBY NADZORUJĄCEJ!

1 punkt

1 Uprość dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$:

$$\left(\frac{a^{-1} - 1}{a - 1}\right)^{-1} =$$

maks. 2 punkty

2 Rozwiąż w zbiorze \mathbb{R} :

$$2x \cdot \sqrt{x + 2} = \sqrt{x + 2}$$

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 3

W firmie odbył się pierwszy etap rekrutacji, w którym każdy kandydat uzyskał 0, 1, 2, lub 3 punkty. Następnie każdy z trzech kierowników A, B, C zaprosił niektórych kandydatów na rozmowę kwalifikacyjną.

Kierownik A zaprosił 75% wszystkich kandydatów, czyli wszystkich tych, którzy uzyskali 1 lub 2 punkty.

Kierownik B zaprosił tylko tych kandydatów, którzy uzyskali 3 punkty. Takich kandydatów było o jedną trzecią mniej niż kandydatów, którzy nie uzyskali żadnego punktu.

Kierownik C zaprosił tylko kandydatów, którzy uzyskali co najmniej 2 punkty, a takich było łącznie 40%.

(CZVV)

maks. 2 punkty

3 Oblicz,

- 3.1 ile procent wszystkich kandydatów w pierwszym etapie rekrutacji uzyskało 2 punkty,
- 3.2 ile procent wszystkich kandydatów zaproszono tylko na jedną rozmowę kwalifikacyjną.

maks. 2 punkty

4 Rozwiąż nierówność w zbiorze \mathbf{R} :

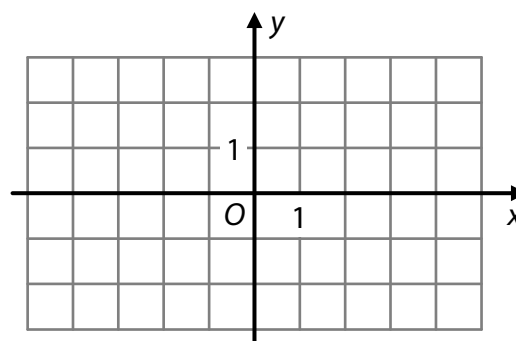
$$|17 - 2x| \leq 2x$$

W karcie odpowiedzi przedstaw cały **przebieg rozwiązania**.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 5

Dla wszystkich dopuszczalnych $x \in \mathbf{R}$ jest dana funkcja:

$$f: y = (4 - x)^{\frac{1}{2}} - 1$$



(CZVV)

maks. 2 punkty

5

- 5.1 Określ dziedzinę funkcji f .
- 5.2 W kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy skonstruuj wykres funkcji f .

W karcie odpowiedzi popraw wszystko **długopisem**.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 6

Stoisko z owocami w hali targowej było otwarte przez 3 dni. Przed otwarciem stoisko było puste. Stosunek ilości owoców w kg, które przywieziono na stoisko pierwszego, drugiego i trzeciego dnia, wynosił $3 : 2 : 1$. Stosunek ilości owoców w kg, które sprzedano na stoisku w poszczególnych dniach (w tej samej kolejności), wynosił $2 : 3 : 2$.

Na końcu dnia niesprzedane owoce zostawały na stoisku. Drugiego dnia zostało na stoisku 60 kg owoców, trzeciego dnia sprzedano wszystkie owoce.

(CZVV)

maks. 2 punkty

6 Oblicz, ile kg owoców

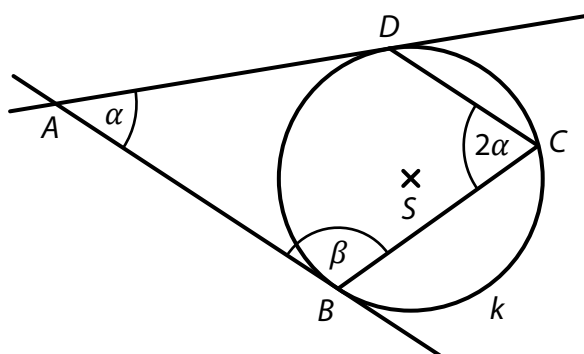
- 6.1 przywieziono na stoisko trzeciego dnia,
- 6.2 sprzedano na stoisku drugiego dnia.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 7

Punkt A leży na zewnątrz okręgu k o środku S .

Z punktu A skonstruowane są dwie styczne do okręgu k , które stykają się z okręgiem k w punktach B, D .

Na okręgu k leży punkt C , który jest wierzchołkiem **trapezu** $ABCD$ o podstawach AB i CD . W trapezie miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A wynosi α , przy wierzchołku B wynosi β , a przy wierzchołku C wynosi 2α .



(CZVV)

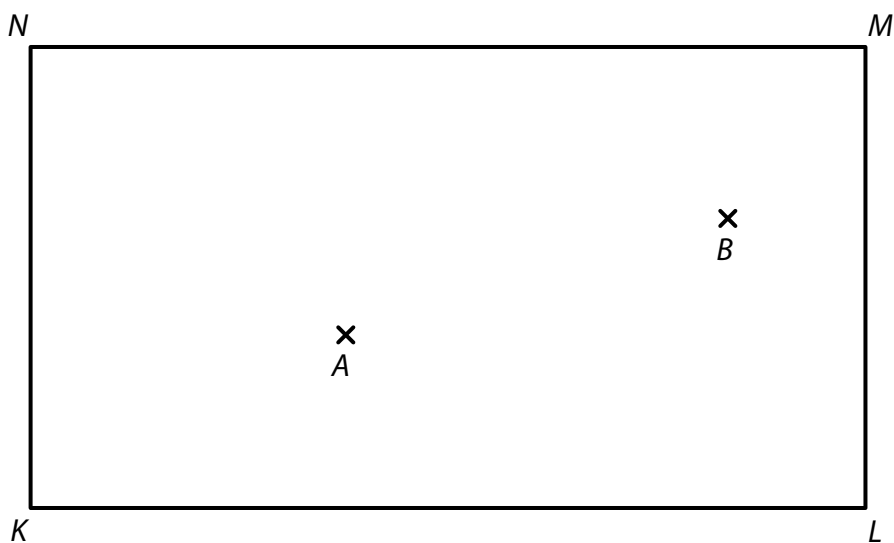
maks. 2 punkty

7 Oblicz

- 7.1 wartość α ,
- 7.2 wartość β .

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 8

Na płaszczyźnie leży prostokąt $KLMN$ i jego dwa punkty wewnętrzne A, B .



(CZVV)

maks. 3 punkty

- 8** Punkty A, B są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Pozostałe dwa wierzchołki C, D tego równoległoboku leżą na bokach prostokąta $KLMN$.
- 8.1 Szukamy wierzchołków C, D równoległoboku $ABCD$.
Sporządź szkic równoległoboku $ABCD$ i przeprowadź analizę lub opisz przebieg konstrukcji.
- 8.2 Na rysunku skonstruuj brakujące wierzchołki równoległoboku $ABCD$ i narysuj równoległobok.
Znajdź wszystkie rozwiązania.

W karcie odpowiedzi popraw wszystko długopisem.

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 9

Nową metodę leczenia testowano na myszach. Prawdopodobieństwo, że leczenie tą metodą zakończy się sukcesem u **co najmniej** jednej z dwóch losowo wybranych myszy, wynosi 0,84. Wyniki leczenia poszczególnych myszy są niezależne od siebie.

(CZW)

maks. 2 punkty

9 Oblicz prawdopodobieństwo, że u jednej losowo wybranej myszy leczenie nową metodą zakończy się sukcesem.

W karcie odpowiedzi przedstaw cały przebieg rozwiązania.

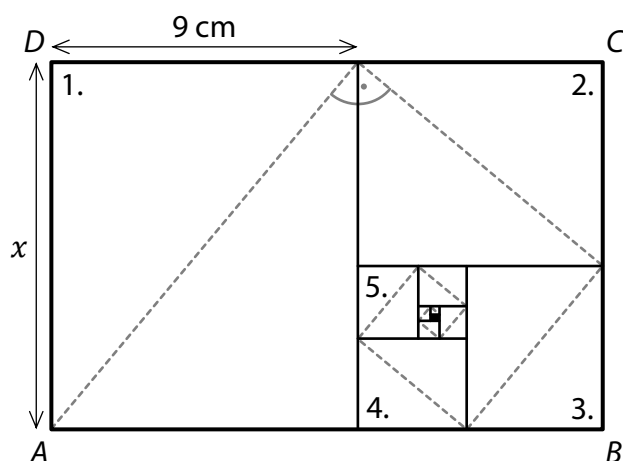
TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 10

Prostokąt $ABCD$ składa się z nieskończenie wielu ciągle zmniejszających się prostokątów (patrz rysunek), które są ponumerowane w kolejności od największego.

W pierwszym prostokącie długość boku AD wynosi x , długość sąsiedniego boku wynosi 9 cm.

W każdym dwóch kolejnych prostokątach przekątne wychodzące ze wspólnego wierzchołka są do siebie prostopadłe. Wszystkie te przekątne tworzą linię łamaną o długości l .

Stosunek podobieństwa $k \in (0; 1)$ każdego dwóch kolejnych prostokątów jest stały.



(CZW)

maks. 4 punkty

10

10.1 W zależności od k wyznacz długość x boku AD .

10.2 Oblicz wartość k dla $x = 6$ cm.

10.3 Oblicz długość ℓ linii łamanej dla $k = 0,8$. (Nie zaokrąglaj wyniku.)

W karcie odpowiedzi przedstaw cały **przebieg rozwiązania** wszystkich części zadania.

maks. 3 punkty

11 Rozwiąż w zbiorze R:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

W karcie odpowiedzi przedstaw cały przebieg rozwiązania.

12 Przyporządkuj do każdego zadania (12.1–12.3) jego rozwiązanie (A–F).

- 12.1 Ze zbioru $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ wybieramy trzy różne **kolejne** cyfry i utworzymy z nich trzycyfrową liczbę naturalną.
(Możemy na przykład utworzyć liczby 201, 567, 897, 987.)

Ile takich różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć? _____

- 12.2 Ze zbioru $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ wybieramy trzy różne cyfry i utworzymy z nich trzycyfrową liczbę naturalną, tak aby jej cyfry były (od lewej) uporządkowane malejąco.
(Możemy na przykład utworzyć liczby 210, 542, 741, 743.)

Ile takich różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć? _____

- 12.3 Ze zbioru $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ wybieramy trzy różne cyfry i utworzymy z nich trzycyfrową liczbę naturalną, tak aby największa z wybranych cyfr była cyfrą setek.
(Możemy na przykład utworzyć liczby 201, 310, 524, 542.)

Ile takich różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć? _____

- A) 36
- B) 40
- C) 46
- D) 52
- E) 56
- F) inna liczba

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 13

Dane jest równanie z parametrem rzeczywistym p :

$$x^2 + py^2 - 16y^2 - p = 0$$

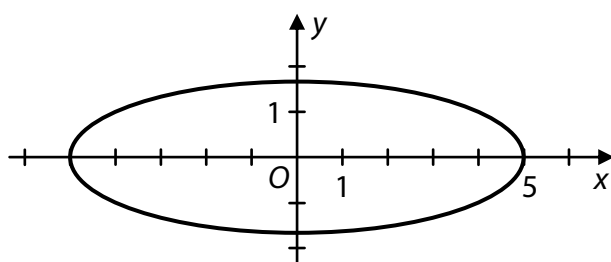
(CZVV)

maks. 3 punkty

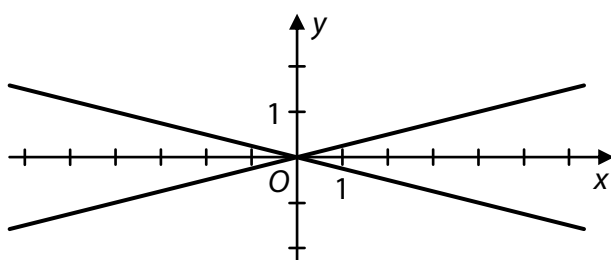
13 Każdy z następujących zbiorów punktów $X[x; y]$ (13.1–13.3) skonstruowanych w kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy można opisać danym równaniem z określoną wartością parametru p .

Przyporządkuj do każdego zbioru (13.1–13.3) odpowiednią wartość parametru p (A–F).

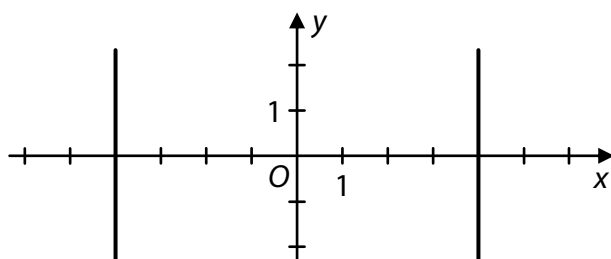
13.1



13.2



13.3



- A) $p = 0$
- B) $p = 4$
- C) $p = 9$
- D) $p = 16$
- E) $p = 25$
- F) inna wartość

2 punkty

14 Dany jest ciąg:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ gdzie } a_n = n^2 - 3n$$

Ile wyrazów a_k danego ciągu spełnia warunek $a_{k+1} - a_k \leq 60$?

- A) dokładnie 29 wyrazów
- B) dokładnie 30 wyrazów
- C) dokładnie 31 wyrazów
- D) nieskończenie wiele wyrazów
- E) żaden wyraz

2 punkty

15 **Ile wynosi suma wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez siedem?**

- A) mniej niż 70 336
- B) 70 336
- C) 70 784
- D) 71 071
- E) więcej niż 71 071

2 punkty

16 Dany jest wielomian ze zmiennymi rzeczywistymi x, y :

$$4xy^2 - 2y^3 + 2x^2 - xy - 4x + 2y$$

Który dwumian można z danego wielomianu wyciągnąć przed nawias podczas rozkładu na czynniki?

- A) $2x + y$
- B) $2x - y$
- C) $y^2 - 1$
- D) $x + 2y^2$
- E) $x - 2y$

TEKST ŹRÓDŁOWY DO ZADANIA 17

Dane są równania:

I. $2^{1-x} = -2$

II. $\log_{0,5}(2-x) = -2$

III. $\log_2(2-x) = \log_2(x-5)$

(CZW)

2 punkty

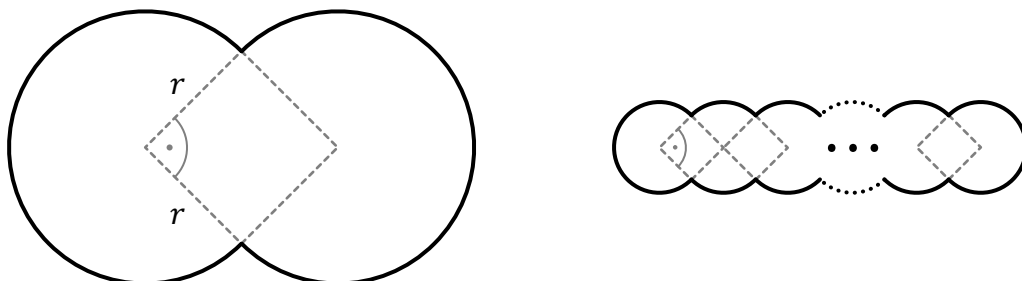
17 **Które z podanych równań nie ma rozwiązania w zbiorze \mathbb{R} ?**

- A) tylko I.
- B) tylko II.
- C) tylko I. i II.
- D) tylko I. i III.
- E) I., II. i III.

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 18

Pierwsza figura powstała przez częściowe nałożenie koła o promieniu r na przystające koło.
Druga figura powstała z większej liczby kół o promieniu $\frac{1}{3}r$ w taki sposób, że drugie i każde kolejne koło nałożyło się tylko na poprzednie koło, tak samo jak w pierwszej figurze.

Obie figury mają **taki sam obwód**.



(CZVV)

2 punkty

18 Z ilu kół powstała druga figura?

- A) z 8 kół
- B) z 10 kół
- C) z 12 kół
- D) z 14 kół
- E) z innej liczby kół

2 punkty

19 Jedna kula jest wpisana w sześcian a druga opisana na tym samym sześcianie.

Ile razy pole powierzchni kuli opisanej jest większe niż pole powierzchni kuli wpisanej?

- A) 2 razy
- B) $2\sqrt{2}$ razy
- C) 3 razy
- D) $3\sqrt{3}$ razy
- E) inna wielokrotność

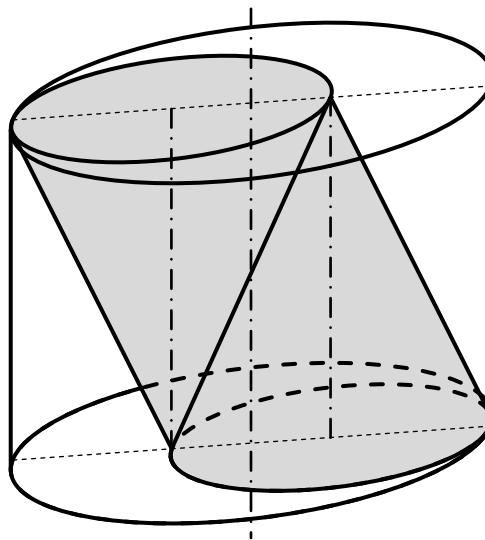
TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 20

Część szklanego walca obrotowego tworzą dwa przystające stożki obrotowe wykonane z szarego szkła.

Każdy ze stożków ma oś równoległą do osi walca oraz podstawę, która leży wewnątrz jednej z podstaw walca i dotyka powierzchni bocznej walca.

Stożki mają dokładnie jedną wspólną tworzącą. Ta tworząca przecina oś walca.

Reszta walca wykonana jest z przezroczystego szkła.



(CZVV)

2 punkty

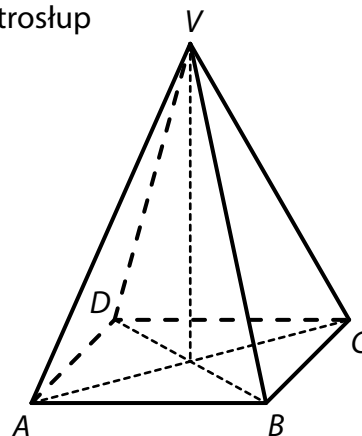
20 **Ile procent objętości walca wykonano z przezroczystego szkła?**

- A) co najmniej 40%, ale mniej niż 50%
- B) co najmniej 50%, ale mniej niż 60%
- C) co najmniej 60%, ale mniej niż 70%
- D) co najmniej 70%, ale mniej niż 80%
- E) co najmniej 80%

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 21

W kartezjańskim układzie współrzędnych $Oxyz$ znajduje się ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDV$, dla którego dane jest:

$B[-1; 2; 0]$, $D[3; -2; 2]$, $V[5; 2; -3]$



(CZVV)

2 punkty

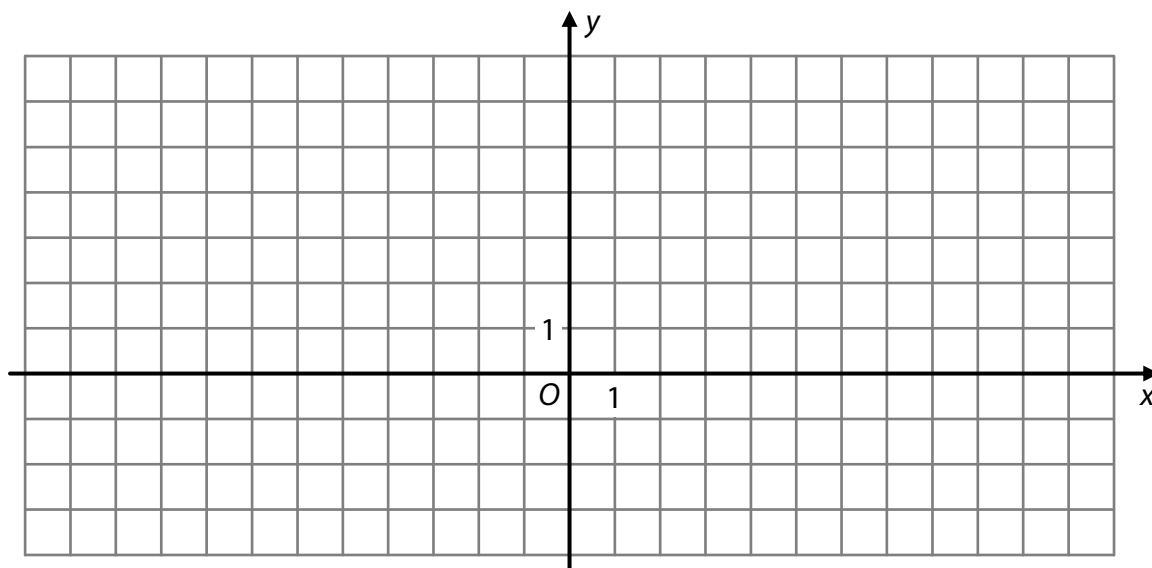
21 Jakie jest równanie płaszczyzny ABC ?

- A) $x + 2y + 2z - 3 = 0$
- B) $y + 2z - 2 = 0$
- C) $x - 2z + 1 = 0$
- D) $x - y - 1 = 0$
- E) $2x + y - 2z = 0$

TEKST ŹRÓDŁOWY I RYSUNEK DO ZADANIA 22

Punkt $S[-1; 3]$ jest środkiem rombu $ABCD$.

Bok AB tego rombu leży na osi współrzędnych x , a wierzchołek C na osi współrzędnych y .



(CZVV)

maks. 3 punkty

22 Oceń prawdziwość następujących zdań (22.1–22.3).

Zaznacz T – tak, jeśli jest prawdziwe, lub N – nie, jeśli nieprawdziwe.

- | | T | N |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 22.1 Odległość punktu S od prostej AB jest taka sama jak od prostej CD . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 22.2 $ BD = 3 \cdot AC $ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 22.3 Pole powierzchni rombu wynosi $S_{ABCD} = \frac{3}{5} \cdot AB \cdot BC $ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

SPRAWDŹ, CZY WPISAŁEŚ/AŚ WSZYSTKIE ODPOWIEDZI DO KARTY ODPOWIEDZI.
