

# MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD21C0T01

## DIDAKTICKÝ TEST

**Maximální bodové hodnocení: 50 bodů**  
**Hranice úspěšnosti: 33 %**

### 1 Základní informace k zadání zkoušky

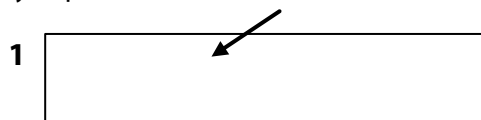
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

### 2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** písíčí propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

### 2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

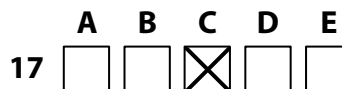
- Výsledky **píšete čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapíšte správné řešení.

### 2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvete původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

**TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!**

1 bod

1 Výraz s proměnnou  $x \in \mathbf{R}$  rozložte na součin lineárních dvojčlenů.

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 =$$

**Řešení:**

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2 \cdot (x - 3) - 1 \cdot (x - 3) = (x - 3)(x^2 - 1) = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$$

1 bod

2 Jestliže mnohočlen  $P(x)$  s proměnnou  $x \in \mathbf{R}$  vydělíme trojčlenem  $(x^2 + x + 2)$ , dostaneme neúplný podíl  $(x - 2)$  a zbytek  $(-4)$ .

Určete mnohočlen  $P(x)$ .

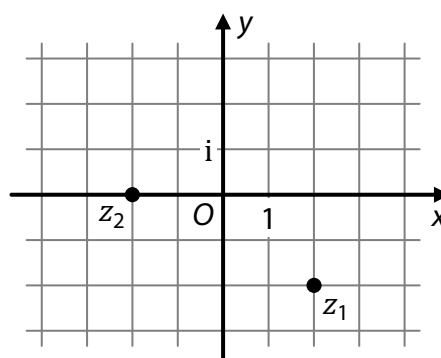
**Řešení:**

$$P(x) = (x^2 + x + 2) \cdot (x - 2) + (-4) = x^3 - x^2 - 8$$

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

V Gaussově rovině jsou (v mřížových bodech) zobrazena komplexní čísla  $z_1$  a  $z_2$ .

Platí:  $z = z_1 : z_2$ .



(CZVV)

1 bod

3 Zapište číslo  $z$  v goniometrickém tvaru tak, aby jeho argument byl z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .

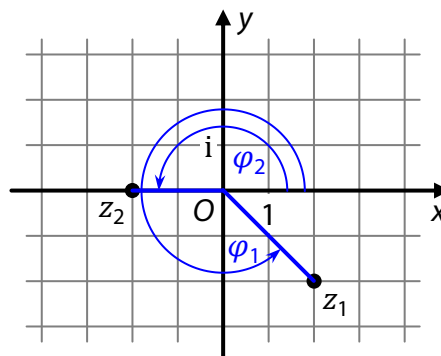
**Řešení:**

Z obrázku určíme absolutní hodnoty a argumenty zadaných čísel  $z_1, z_2$  a čísla zapíšeme v goniometrickém tvaru:

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) =$$

$$2\sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$



Vypočteme číslo  $z$ :

$$z = z_1 : z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \left[ \cos \left( \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

### Jiný způsob řešení:

Z obrázku získáme zadaná čísla  $z_1$  a  $z_2$  v algebraickém tvaru a vypočteme jejich podíl  $z$ :

$$z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = -2$$
$$z = z_1 : z_2 = \frac{2 - 2i}{-2} = -1 + i$$

Číslo  $z$  převedeme do goniometrického tvaru:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Argument  $\varphi$  čísla  $z$  má být z intervalu  $(0; 2\pi)$ :

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \varphi \in (0; 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

---

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Výrobní družstvo vyrobilo sadu stejných sekaček, každou s tímiž náklady na její výrobu. Polovinu sekaček družstvo prodalo za cenu o 70 % vyšší, než byly náklady na jejich výrobu. Každou další sekačku družstvo prodává za cenu o 50 % vyšší, než byly náklady na její výrobu.

Přestože družstvo ještě neprodalo všechny sekačky, peníze získané za prodané sekačky již nyní přesně pokryly náklady na výrobu celé sady sekaček.

(CZVV)

**max. 3 body**

**4 Vypočtěte, kolik procent všech vyrobených sekaček již družstvo prodalo.**

**V záznamovém archu** uveďte celý **postup řešení**.

#### Řešení:

Počet všech sekaček v sadě označíme  $s$ , náklady na výrobu jedné sekačky  $n$  ( $s > 0, n > 0$ ).

Náklady na výrobu celé sady sekaček:  $ns$

Tržby z prodeje první poloviny sekaček:  $1,7n \cdot 0,5s = 0,85ns$

Prodej první poloviny sekaček pokryl výrobní náklady celé sady z 85 %, družstvo tedy ze zbylých sekaček muselo prodat ještě tolik kusů, aby jejich prodejem pokrylo zbývajících 15 % výrobních nákladů celé sady, tj.  $0,15ns$ .

Počet sekaček prodaných za cenu o 50 % vyšší než náklady na výrobu:  $\frac{0,15ns}{1,5n} = 0,1s$

Počet všech prodaných sekaček:  $0,5s + 0,1s = 0,6s$ , tj. 60 % všech sekaček v sadě

Družstvo již prodalo 60 % všech vyrobených sekaček.

### Jiný způsob řešení:

Náklady na výrobu celé sady sekačky označíme  $N$  ( $N > 0$ ).

Podíl všech prodaných sekaček na počtu všech vyrobených sekaček označíme  $x$ .

Protože družstvo prodalo více než polovinu vyrobených sekaček, platí  $x \in (0,5; 1)$ .

Tržby z prodeje sekaček se rovnají nákladům na výrobu celé sady:

$$1,7 \cdot 0,5 \cdot N + 1,5 \cdot (x - 0,5) \cdot N = N$$

$$0,85 + 1,5x - 0,75 = 1$$

$$1,5x = 0,9$$

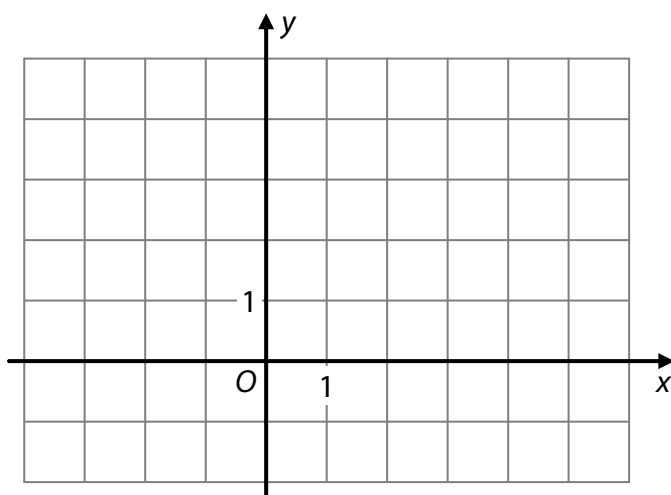
$$x = 0,6$$

Družstvo již prodalo 60 % všech vyrobených sekaček.

### VÝCHOZÍ TEXT, OBRÁZEK A TABULKA K ÚLOZE 5

Pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  je dána funkce  $f: y = a^x$ , kde  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  a pro kterou platí:

$$a^{x+2} = 2 \cdot a^x$$



$x$	-2	0	2	4
$a^x$		1		

(CZVV)

max. 2 body

5

- 5.1 Zakreslete graf funkce  $f$  v kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  a vyznačte v grafu všechny body, jejichž  $x$ -ové souřadnice jsou uvedeny v tabulce (chybějící  $y$ -ové souřadnice dopočtete).

**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

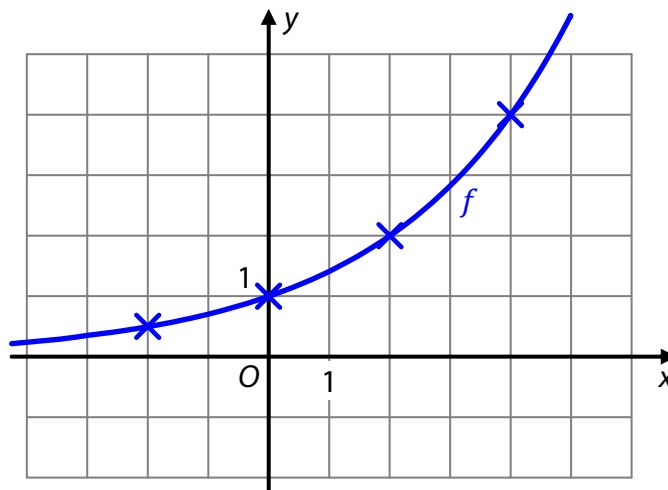
### Řešení:

Ze známé hodnoty  $a^0 = 1$  získáme opakovaným užitím vztahu  $a^{x+2} = 2 \cdot a^x$  hodnoty funkce  $f$  v dalších bodech:

$x$	0	2	4		0	-2
$a^x$	$a^0 = 1$	$a^{0+2} = 2 \cdot a^0$ $a^2 = 2 \cdot 1$ $a^2 = 2$	$a^{2+2} = 2 \cdot a^2$ $a^4 = 2 \cdot 2$ $a^4 = 4$		$a^0 = 1$ $a^{-2+2} = 2 \cdot a^{-2}$	$2 \cdot a^{-2} = a^0$ $a^{-2} = \frac{a^0}{2}$ $a^{-2} = \frac{1}{2}$

$x$	-2	0	2	4
$a^x$	0,5	1	2	4

Do soustavy souřadnic zakreslíme body, jejichž souřadnice jsou v tabulce, a proložíme jimi graf exponenciální funkce  $f: y = a^x$ .



5.2 Vypočtěte hodnotu  $f(1)$ .

**Řešení:**

$$a^{x+2} = 2 \cdot a^x, \quad a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$a^x \cdot a^2 = 2 \cdot a^x$$

$$a^2 = 2$$

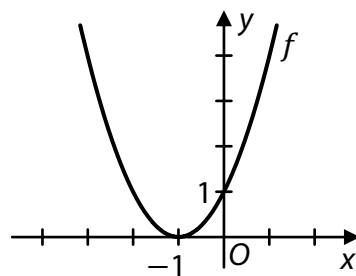
$$a = \sqrt{2}$$

$$f(1) = a^1 = a = \sqrt{2}$$

## VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 6

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je sestrojen graf kvadratické funkce  $f$  s definičním oborem  $\mathbf{R}$ .

Pro funkci  $g$  platí:  $g(x) = -f(x + 2)$ .



(CZVV)

**max. 2 body**

**6**

6.1 Definiční obor funkce  $g$  lze zapsat jako sjednocení  $(I_1 \cup I_2)$  takových dvou intervalů, že v každém z nich je funkce  $g$  monotónní.

Z obou těchto intervalů zapište ten interval, v němž je funkce  $g$  klesající.

**Řešení:**

Sestrojíme graf funkce  $g$ :

1. Posunutím grafu funkce  $f$  o 2 jednotky ve směru záporné poloosy  $x$  získáme graf funkce  $f_1$ :

$$f_1(x) = f(x + 2)$$

2. Graf funkce  $g$  je potom obrazem grafu funkce  $f_1$  v osové souměrnosti podle souřadnicové osy  $x$ :

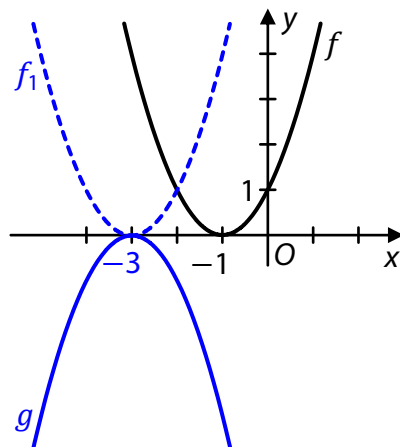
$$g(x) = -f_1(x) = -f(x + 2)$$

Z grafu je patrné, že

funkce  $g$  je klesající v intervalu  $(-3; +\infty)$ ,

zatímco ve zbytku definičního oboru je rostoucí.

Hodnotu  $(-3)$  lze přiřadit do kteréhokoli z intervalů  $I_1, I_2$ .



6.2 Určete souřadnice průsečíku  $Y$  grafu funkce  $g$  se souřadnicovou osou  $y$ .

**Řešení:**

Průsečík grafu funkce  $g$  se souřadnicovou osou  $y$  je bod o souřadnicích  $[0; g(0)]$ .

Z grafu funkce  $g$  lze nahlédnout její předpis  $g: y = -(x + 3)^2$ .

$$g(0) = -(0 + 3)^2 = -9, \quad Y[0; -9]$$

**případně**

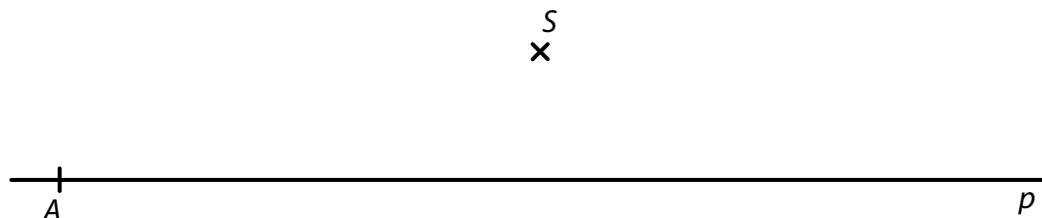
$$g(0) = -f(0 + 2) = -f(2)$$

Graf funkce  $f$  je posunutím grafu funkce  $y = x^2$  o 1 jednotku ve směru záporné poloosy  $x$ , tedy  $f(2) = 9$ .

$$g(0) = -f(2) = -9, \quad Y[0; -9]$$

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V rovině leží body  $A, S$ . Bodem  $A$  prochází přímka  $p$ .



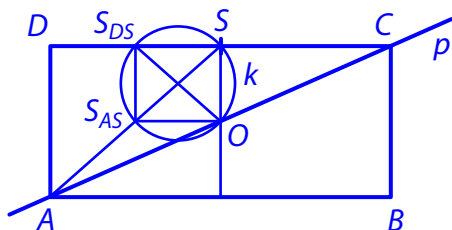
(CZVV)

**max. 3 body**

**7** Bod  $A$  je vrchol obdélníku  $ABCD$ . Na přímce  $p$  leží ještě vrchol  $C$  obdélníku. Bod  $S$  je střed strany  $CD$  obdélníku  $ABCD$ .

7.1 Hledáme vrcholy  $B, C, D$  obdélníku  $ABCD$ .  
Proveďte náčrtek obdélníku  $ABCD$  a запиšte rozbor nebo postup konstrukce.

**Řešení:**



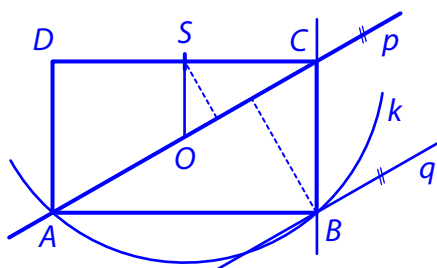
Hledáme střed  $O$  obdélníku  $ABCD$ :

1.  $O \in p \wedge O \in k$ ,  
kde  $k$  je kružnice opsaná obdélníku  $OSS_{DS}S_{AS}$

Hledáme body  $C, D, B$ :

2.  $S(O): A \rightarrow C$
3.  $S(S): C \rightarrow D$
4.  $S(O): D \rightarrow B$

**Jiný způsob řešení:**



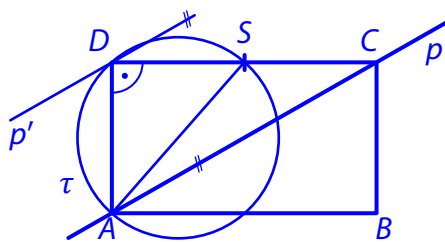
Hledáme bod  $B$ :

1.  $B \in k(S; SA) \wedge B \in q$ ,  
kde  $q \parallel p \wedge |pq| = 2|Sp| \wedge q \not\subset \rightarrow pS$ ,  
resp.  $\mathcal{H}(S; 3): p \rightarrow q$ ,  
protože  $\triangle ABC \sim \triangle CSO$  ( $O$  je střed obdélníku  $ABCD$ )

Hledáme body  $C, D$ :

2.  $C \in p \wedge \leftrightarrow BC \perp \leftrightarrow AB$
3. Bod  $D$  je chybějícím vrcholem obdélníku  $ABCD$ .

### Ještě jiný způsob řešení:



Hledáme bod  $D$ :

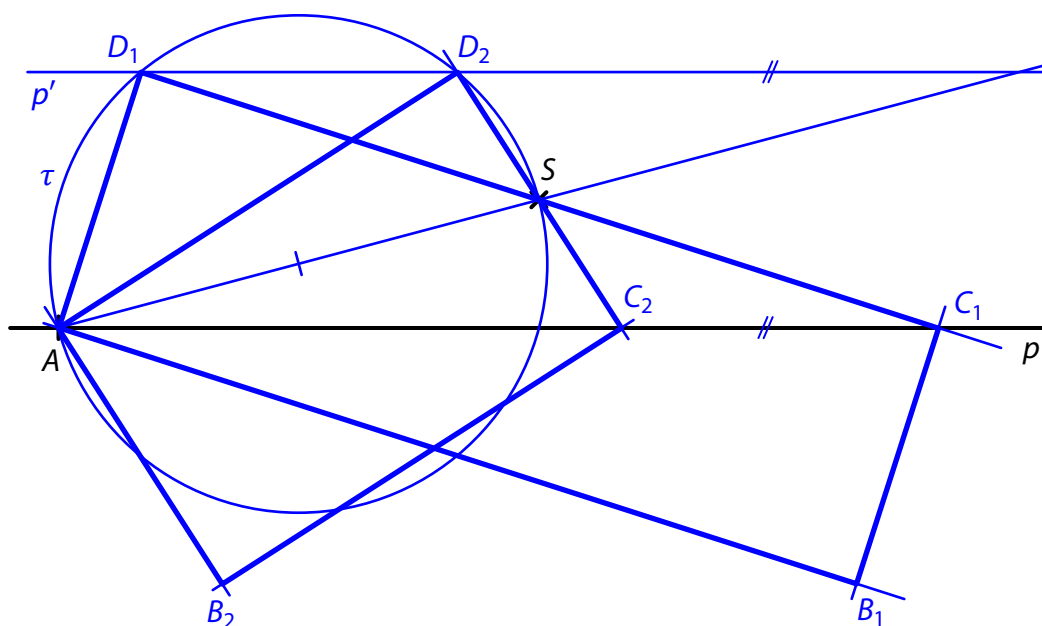
1.  $D \in \tau(AS) \wedge D \in p'$ , kde  $\mathcal{S}(S): p \rightarrow p'$ , protože  $C \in p \wedge \mathcal{S}(S): C \rightarrow D$

Hledáme body  $C, B$ :

2.  $\mathcal{S}(S): D \rightarrow C$
3. Bod  $B$  je chybějícím vrcholem obdélníku  $ABCD$ .

7.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy obdélníku  $ABCD$  a obdélník narýsujte. Najděte všechna řešení.

**Řešení** (dle rozboru v posledním způsobu řešení úlohy 7.1):



Popis konstrukce:

1.  $\tau; \tau(AS)$
2.  $p'; \mathcal{S}(S): p \rightarrow p'$
3.  $D; \{D\} = \tau \cap p'$
4.  $C; \mathcal{S}(S): D \rightarrow C$
5.  $B; \leftrightarrow AB \parallel \leftrightarrow CD \wedge \leftrightarrow BC \parallel \leftrightarrow AD$
6. obdélník  $ABCD$

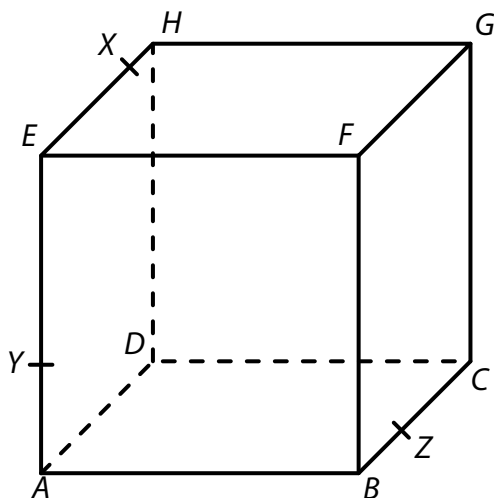
Závěr: Úloha má 2 řešení.

**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.



## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V krychli  $ABCDEFGH$  leží bod  $X$  na hraně  $EH$ , bod  $Y$  leží na hraně  $AE$  a bod  $Z$  na hraně  $BC$ .



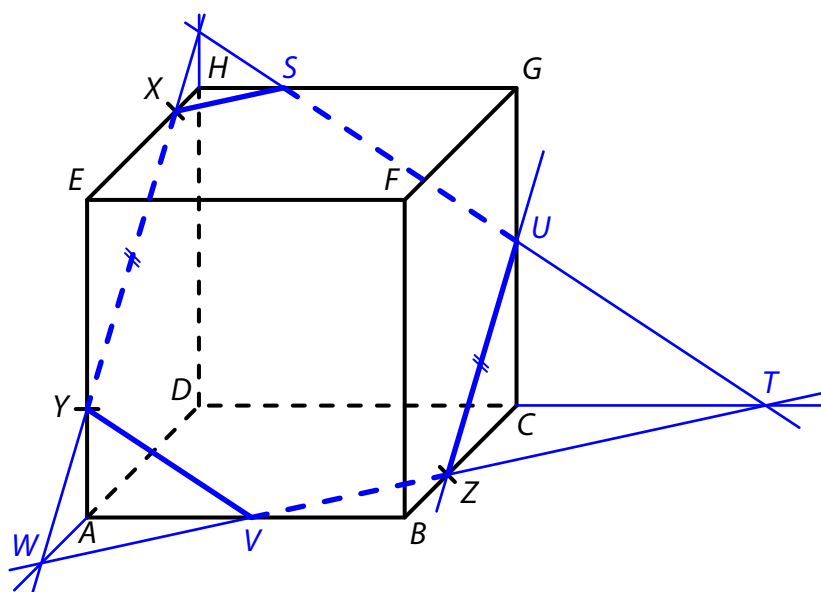
(CZVV)

max. 2 body

**8** Sestrojte řez krychle  $ABCDEFGH$  rovinou  $XYZ$ .

V záznamovém archu obtáhněte vše propisovací tužkou.

**Řešení:**



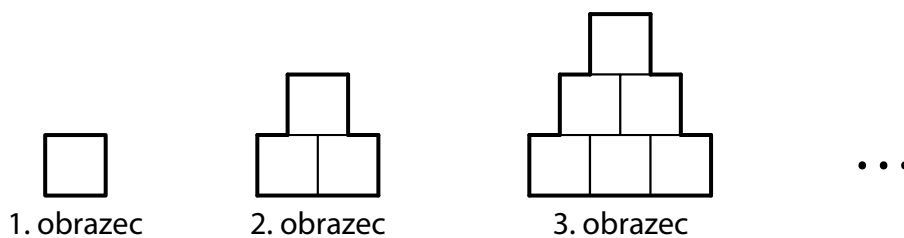
Popis konstrukce:

1.  $W; \{W\} = \leftrightarrow XY \cap \leftrightarrow DA$
2.  $V; \{V\} = \leftrightarrow WZ \cap AB$
3.  $U; U \in CG \wedge \leftrightarrow ZU \parallel \leftrightarrow XY$
4.  $T; \{T\} = \leftrightarrow WZ \cap \leftrightarrow DC$
5.  $S; \{S\} = \leftrightarrow TU \cap GH$
6. šestiúhelník  $XYZUS$

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Na obrázku jsou nakresleny tři obrazce složené ze čtverců o straně délky 1 cm.

Za těmito obrazci následují další. Obrazec s pořadovým číslem  $n > 1$  se vytvoří z předchozího obrazce přidáním spodní řady, která obsahuje  $n$  čtverců.



(CZVV)

max. 3 body

9 Jeden z obrazců je složen z 210 čtverců.

9.1 Vypočtěte, kolikátý je tento obrazec.

**Řešení:**

Počet všech čtverců v  $n$ -tém obrazci označíme  $s_n$ .

Počet čtverců v jednotlivých řadách  $n$ -tého obrazce roste shora po jedné od 1 do  $n$ .

Počet  $s_n$  je tedy součtem prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti všech přirozených čísel.

$$s_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1), \quad s_n = 210$$

$$\frac{n}{2}(n + 1) = 210, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n(n + 1) = 420 \quad \text{tj. součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel (20 \cdot 21 = 420)}$$
$$n = 20$$

Obrazec složený z 210 čtverců je 20. v pořadí.

9.2 Vypočtěte v cm obvod tohoto obrazce.

**Řešení:**

V  $n$ -tém obrazci je  $n$  řad čtverců, spodní (nejdelší) řada obsahuje  $n$  čtverců.

Každý čtverec má stranu délky 1 cm.

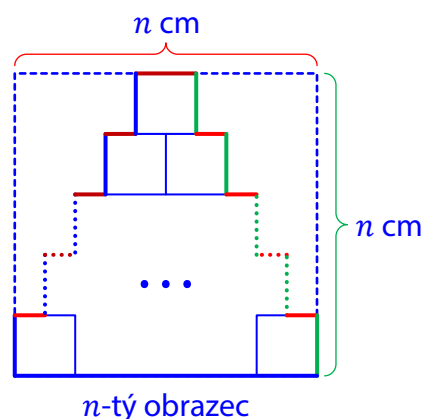
Při pohledu shora mají **všechny vodorovné strany obrazce** dohromady stejnou délku jako nejdelší vodorovná strana, tj.  $n$  cm.

Při pohledu zprava mají **všechny svislé strany obrazce** dohromady délku  $n$  cm, stejně tak zleva.

Obvod  $n$ -tého obrazce:

$$o_n = 4 \cdot n \text{ cm}, \quad n = 20 \text{ (viz řešení úlohy 9.1)}$$

$$o_{20} = 4 \cdot 20 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$$



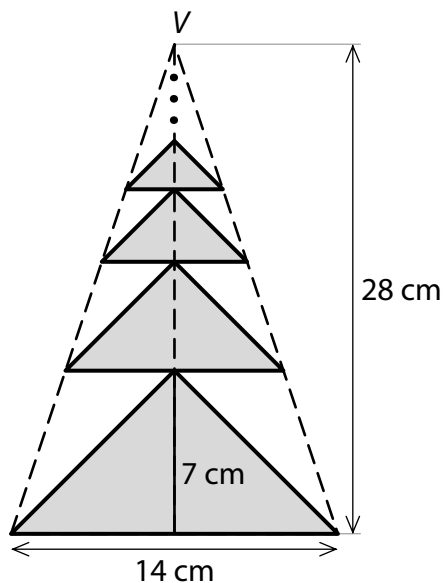
**V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Šedý obrazec je složen z nekonečně mnoha rovnoramenných trojúhelníků. Každé dva sousední trojúhelníky mají právě jeden společný bod a jsou obrazem a vzorem ve stejnoolehlosti se středem  $V$ . Na obrázku jsou zakresleny pouze 4 trojúhelníky.

V největším trojúhelníku má základna délku 14 cm a výška na základnu velikost 7 cm.

Výška celého obrazce je 28 cm.



(CZVV)

max. 3 body

**10 Vypočítejte v  $\text{cm}^2$  obsah šedého obrazce.**

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

**Řešení:**

U všech délek, resp. obsahů, pracujeme pouze s číselnými hodnotami v cm, resp. v  $\text{cm}^2$ .

V největším šedém trojúhelníku označíme délku základny  $a_1$ , výšku  $v_1$  a obsah  $S_1$ .

Výšku celého šedého obrazce označíme  $v$ , obsah obrazce  $S$ .

$$a_1 = 14, \quad v_1 = 7, \quad v = 28$$

Všechny šedé trojúhelníky v obrazci jsou navzájem podobné, přitom každé dva sousední mají též koeficient podobnosti  $k < 1$  ( $k$  je koeficient stejnoolehlosti sousedních trojúhelníků).

Velikosti výšek všech šedých trojúhelníků (zdola) tvoří nekonečnou geometrickou posloupnost  $(v_n)_{n=1}^{\infty}$  s kvocientem  $k$ . Výšku celého obrazce získáme jako součet nekonečné geometrické řady vytvořené ze členů této posloupnosti.

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_1 k^{n-1} = \frac{v_1}{1-k}$$

$$k = 1 - \frac{v_1}{v} = 1 - \frac{7}{28} = \frac{3}{4}$$

Obsahy trojúhelníků (zdola) tvoří geometrickou posloupnost  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  s kvocientem  $k^2$ . Obsah šedého obrazce získáme jako součet nekonečné geometrické řady vytvořené ze členů této posloupnosti.

$$S_1 = \frac{a_1 v_1}{2} = \frac{14 \cdot 7}{2} = 49, \quad k^2 = \frac{9}{16}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 (k^2)^{n-1} = \frac{S_1}{1 - k^2} = \frac{49}{1 - \frac{9}{16}} = 112$$

### případně

Trojúhelník  $A'B'V$  je podobný trojúhelníku  $ABV$  s koeficientem podobnosti  $k$ .

Velikost výšky na základnu  $A'B'$  označíme  $v'$ .

$$k = \frac{v'}{v}, \quad v' = v - v_1$$

$$k = \frac{v - v_1}{v}$$

$$k = \frac{28 - 7}{28} = \frac{3}{4}$$

Poměr obsahu  $S_1$  největšího šedého trojúhelníku ku obsahu lichoběžníku  $ABA'B'$  je stejný jako poměr obsahu  $S$  celého šedého obrazce ku obsahu trojúhelníku  $ABV$  (součet obsahů všech lichoběžníků).

$$\frac{S}{S_{ABV}} = \frac{S_1}{S_{ABA'B'}}$$

Lichoběžník  $ABA'B'$  má základny délek  $a_1, a_2$  a výšku  $v_1$ .

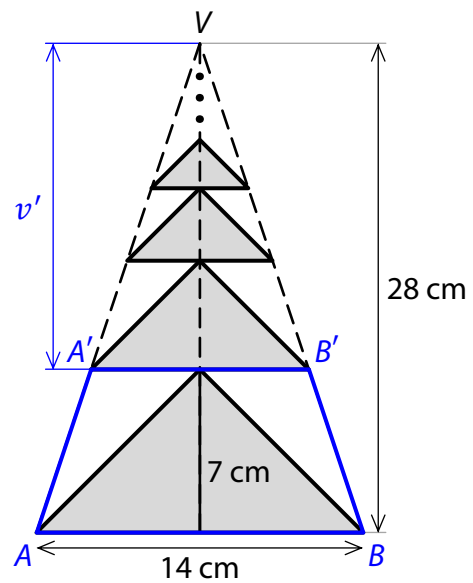
$$S_{ABA'B'} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot v_1, \quad a_2 = ka_1$$

$$\frac{S_1}{S_{ABA'B'}} = \frac{\frac{a_1 v_1}{2}}{\frac{a_1 + ka_1}{2} \cdot v_1} = \frac{1}{1 + k} = \frac{S}{S_{ABV}}$$

$$S = S_{ABV} \cdot \frac{1}{1 + k}$$

$$S = \frac{a_1 v}{2} \cdot \frac{1}{1 + k} = \frac{14 \cdot 28}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 196 \cdot \frac{4}{7} = 112$$

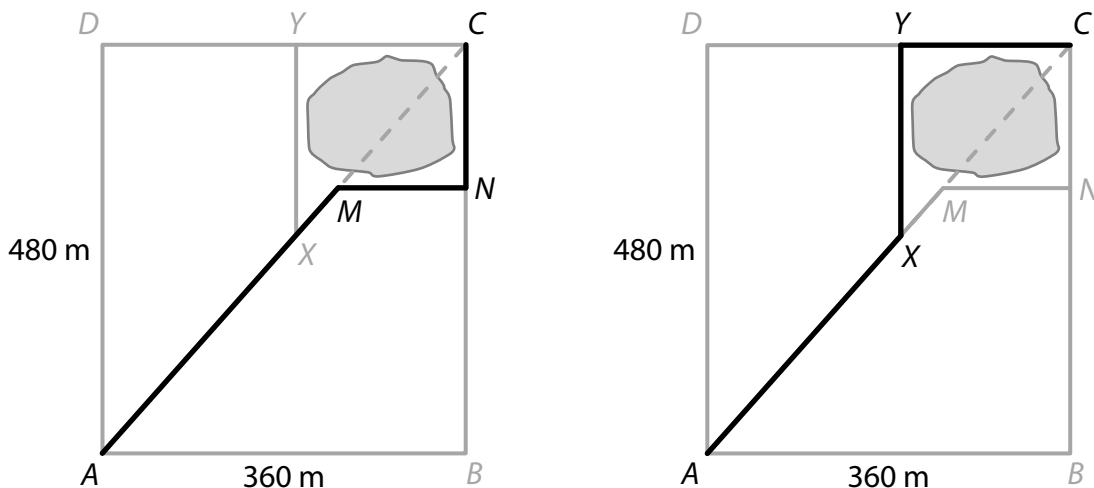
Obsah šedého obrazce je  $112 \text{ cm}^2$ .



## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Obdélníkový pozemek  $ABCD$  má rozměry 360 m a 480 m. Uvnitř pozemku je rybníček.

První cestu mezi protějšími rohy pozemku představuje lomená čára  $AMNC$ , druhou cestu lomená čára  $AXYC$ . Oba body  $X, M$  leží na úhlopříčce  $AC$ , body  $N, Y$  na stranách obdélníku a úsečky  $MN, XY$  jsou rovnoběžné se stranami obdélníku.



(CZVV)

max. 4 body

11

11.1 U první cesty tvoří délka úsečky  $AM$  dvě třetiny délky úhlopříčky  $AC$ .

**Vypočtete, v jakém poměru je délka úsečky  $AM$  ku délce lomené čáry  $MNC$ .**

**Řešení:**

Délky stran  $AB, BC$  pozemku označíme  $a, b$  a délku úhlopříčky  $AC$  označíme  $u$ .

$$|AB| = a = 360 \text{ m}, \quad |BC| = b = 480 \text{ m},$$

$$|AC| = u = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{360^2 + 480^2} \text{ m} = 600 \text{ m},$$

$$|AM| = \frac{2}{3}u = 400 \text{ m}, \quad |MC| = \frac{1}{3}u$$

Trojúhelník  $MNC$  je podobný trojúhelníku  $ABC$  (podle věty  $uu$ ) s koeficientem podobnosti  $\frac{1}{3}$ :

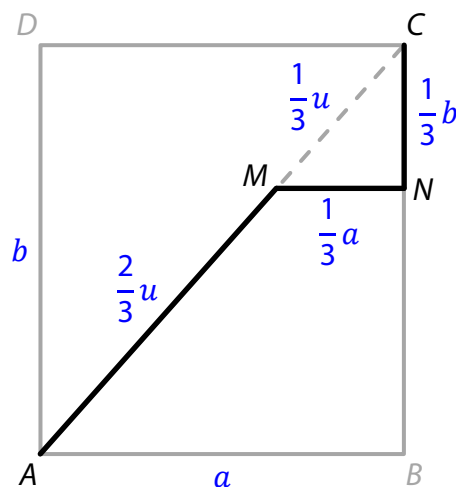
$$|MN| = \frac{1}{3}a = 120 \text{ m}$$

$$|NC| = \frac{1}{3}b = 160 \text{ m}$$

Délka lomené čáry  $MNC$  je součet délek úseček  $MN$  a  $NC$ , tedy 280 m.

$$\frac{|AM|}{|MN| + |NC|} = \frac{400}{280} = 10 : 7$$

Délka úsečky  $AM$  ku délce lomené čáry  $MNC$  je v poměru 10 : 7.



11.2 U druhé cesty je délka úsečky  $AX$  stejná jako délka lomené čáry  $XYC$ .

**Vypočtete v metrech délku lomené čáry  $AXYC$  představující druhou cestu.**

**Řešení:**

Užijeme značení z řešení úlohy 11.1.

Trojúhelník  $CYX$  je podobný trojúhelníku  $ABC$  (podle věty  $uu$ ) s koeficientem podobnosti  $k$ :

$$|XC| = k \cdot u, \quad |XY| = k \cdot b, \quad |YC| = k \cdot a$$

$$|AX| = u - ku = (1 - k) \cdot u$$

Délka úsečky  $AX$  je rovna délce lomené čáry  $XYC$ , tj. součtu délek úseček  $XY$  a  $YC$ :

$$|AX| = |XY| + |YC|$$

$$(1 - k) \cdot u = k \cdot b + k \cdot a$$

$$u - k \cdot u = k \cdot b + k \cdot a$$

$$u = k(a + b + u)$$

$$k = \frac{u}{a + b + u} = \frac{600}{480 + 360 + 600} = \frac{5}{12}$$

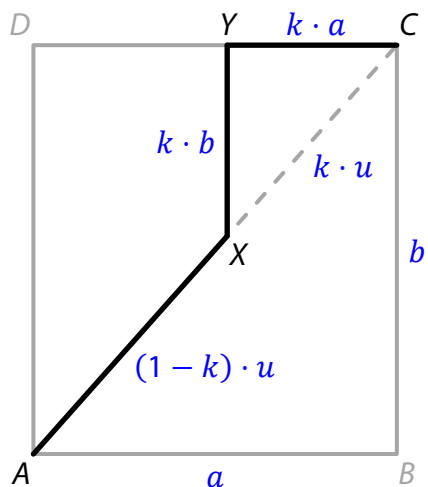
Vypočteme délku lomené čáry  $XYC$  a délku úsečky  $AX$ :

$$|XY| + |YC| = k \cdot b + k \cdot a = k \cdot (b + a) = \frac{5}{12} \cdot (480 \text{ m} + 360 \text{ m}) = 350 \text{ m}$$

$$|AX| = (1 - k) \cdot u = \left(1 - \frac{5}{12}\right) \cdot 600 \text{ m} = 350 \text{ m}$$

Délka druhé cesty je 700 m.

**V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.



**12 Přiřadte ke každé úloze (12.1–12.3) její řešení (A–F).**

- 12.1 Ota má 8 her a Šimon 6 her (všech 14 her je navzájem různých).  
Ota vymění kterékoli 2 své hry za libovolné 2 Šimonovy hry.

**Kolika způsoby si chlapi mohou hry takto vyměnit?**

A

- 12.2 Na digitálních hodinách se každý časový údaj (v hodinách a minutách) mezi půlnocí a 10. hodinou zobrazuje právě **třemi** číslicemi (např. 0:08, 0:21, 9:50).

**Kolik z těchto časových údajů obsahuje tři vzájemně různé číslice?**

B

- 12.3 V kině je posledních 5 volných míst v páté řadě a 2 místa ve druhé řadě. Čtyři ze sedmi příchozích chtějí sedět v páté řadě, jedna osoba ve druhé řadě a zbývajícím dvěma osobám je to lhostejné.

**Kolika způsoby je možné na jednotlivá místa rozsadit těchto 7 osob v souladu s jejich požadavky?**

D

- A) 420  
B) 432  
C) 458  
D) 480  
E) 486  
F) jiný počet

**Řešení:**

- 12.1 Vybereme dvojici z Otových her a dvojici ze Šimonových. Každou dvojici Otových her lze vyměnit za dvojici Šimonových her.

Počet všech způsobů, jak vyměnit dvojice her:  $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 420$

- 12.2 V časovém údaji se mohou na druhé pozici (označující desítky minut) objevit pouze číslice 0 až 5, zatímco na ostatních pozicích se může objevit libovolná z 10 číslic.

Vytváříme časové údaje, v nichž se číslice vzájemně liší:

Nejprve obsadíme druhou pozici kteroukoli z 6 přípustných číslic (0 až 5).

První pozici zleva lze potom obsadit libovolnou číslicí různou od číslice na druhé pozici, tj. ke každé číslici na druhé pozici existuje 9 možností obsazení první pozice. Číslice na třetí pozici se musí lišit od obou zbývajících číslic, tedy máme 8 možností.

Počet všech časových údajů obsahujících tři vzájemně různé číslice:  $6 \cdot 9 \cdot 8 = 432$

- 12.3 Počet způsobů,

jak rozsadit 4 osoby, které chtějí sedět v páté řadě:  $V_4(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

jak usadit osobu, která chce sedět ve druhé řadě: 2

jak rozsadit zbývajících 2 osoby na zbývajících 2 neobsazená místa:  $P(2) = 2 \cdot 1 = 2$

Počet všech způsobů, jak rozsadit všech 7 osob:  $120 \cdot 2 \cdot 2 = 480$

13 Přímka  $p: y = x$  protíná kuželosečku v bodech  $M, N$ .

**Přiřadte ke každé kuželosečce (13.1–13.3) vzdálenost (A–F) bodů  $M, N$ .**

13.1 Kružnice se středem  $S[0; 0]$ , která prochází bodem  $A[-4; 2]$ . D

13.2 Elipsa daná rovnicí  $x^2 + 4y^2 - 40 = 0$ . C

13.3 Parabola s vrcholem  $V[0; -1,5]$  a ohniskem  $F[0; -1]$ . A

A)  $4\sqrt{2}$

B)  $2\sqrt{10}$

C) 8

D)  $4\sqrt{5}$

E) 16

F) jiná vzdálenost

### Řešení:

13.1 Úsečka  $SA$  je poloměr kružnice. Přímka  $p$  prochází středem  $S$  kružnice, vzdálenost bodů  $M, N$  je tedy rovna průměru kružnice, tj.  $2 \cdot |SA|$ .

$$|MN| = 2 \cdot |SA| = 2 \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

13.2 Elipsu označíme  $e$ .

$$M[x; y] \in e \cap p: x^2 + 4y^2 - 40 = 0 \quad \wedge \quad y = x$$

$$x^2 + 4x^2 - 40 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = -2\sqrt{2} \vee x = 2\sqrt{2}, \quad M[2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}], \quad N[-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}]$$

Elipsa  $e$  má střed v počátku soustavy souřadnic  $O$ , jímž prochází přímka  $p$ .

Vzdálenost bodů  $M, N$  je tedy rovna  $2 \cdot |OM|$ .

$$|MN| = 2 \cdot |OM| = 2 \cdot \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{16} = 8$$

13.3 Parabolu označíme  $b$  a její parametr  $k$ . Osou paraboly je souřadnicová osa  $y$ .

$$b: x^2 = 2k(y + 1,5), \quad k = 2 \cdot |VF| = 2 \cdot 0,5 = 1$$

$$x^2 = 2 \cdot 1 \cdot (y + 1,5)$$

$$x^2 = 2y + 3$$

$$M[x; y] \in b \cap p: x^2 = 2y + 3 \quad \wedge \quad y = x$$

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

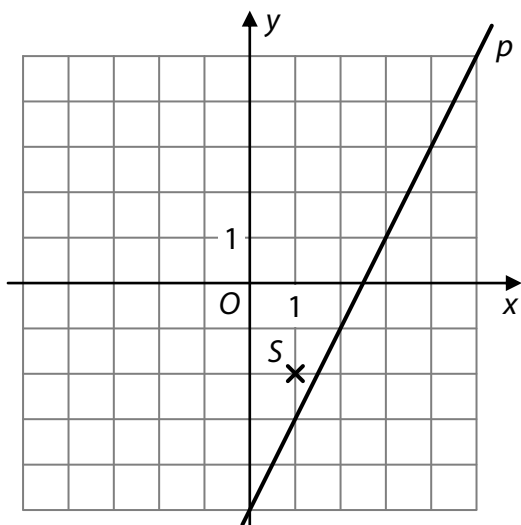
$$x = -1 \vee x = 3, \quad M[3; 3], \quad N[-1; -1]$$

$$|MN| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je zakreslena přímka  $p$  a bod  $S$ .



(Bod  $S$  je mřížový, přímka  $p$  prochází 6 mřížovými body zobrazené části čtvercové sítě.)

(CZVV)

**2 body**

**14** Přímka  $q$  je obrazem přímky  $p$  ve středové souměrnosti se středem  $S$ .

**Která rovnice je obecnou rovnicí přímky  $q$ ?**

A)  $x - 2y + 4 = 0$

B)  $x - 2y - 4 = 0$

C)  $2x - y + 5 = 0$

D)  $2x - y + 3 = 0$

**E)  $2x - y - 3 = 0$**

**Řešení:**

$p: A[1; -3], \vec{n} = (2; -1)$

Obraz  $q$  přímky  $p$  ve středové souměrnosti je rovnoběžný se vzorem ( $q \parallel p$ ), obě přímky mají tedy též normálový vektor  $\vec{n}$ .

Pro konstrukci přímky  $q$  stačí ve středové souměrnosti zobrazit jeden bod přímky  $p$ , např. bod  $A$ .

$S(S): A[1; -3] \rightarrow A'[1; -1]$

$q: 2x - y + c = 0$

$A' \in q: 2 \cdot 1 - (-1) + c = 0, \quad c = -3$

$q: 2x - y - 3 = 0$

**případně:**

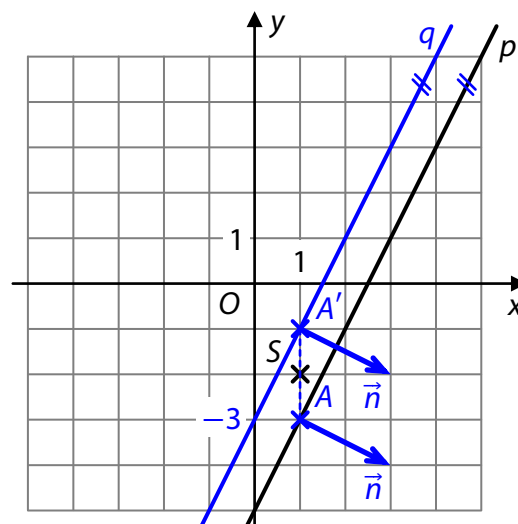
Užijeme směrnicový tvar rovnice přímky  $q: y = ax + b$

Rovnoběžné přímky  $p, q$  mají tutéž směrnici  $a = 2$ .

Přímka  $q$  protíná souřadnicovou osu  $y$  v bodě  $[0; -3]$ , tedy  $b = -3$ .

$q: y = 2x - 3$

$0 = 2x - y - 3$



15 Která nerovnice má v oboru  $\mathbf{R}$  tutéž množinu všech řešení jako nerovnice  $x - 1 < 0$ ?

A)  $\frac{x-1}{-3} < 0$

B)  $\frac{x^2+1}{x-1} < 0$

C)  $\frac{x^2-1}{x+1} < 0$

D)  $\frac{x(x-1)}{x} < 0$

E)  $\frac{x-1}{x^2} < 0$

**Řešení:**

Množinou všech řešení nerovnice  $x - 1 < 0$  v oboru  $\mathbf{R}$  je interval  $(-\infty; 1)$ .

A)  $\frac{x-1}{-3} < 0 \Leftrightarrow x-1 > 0, \quad K_A = (1; +\infty)$

B)  $\frac{x^2+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0, \quad K_B = (-\infty; 1)$

C)  $\frac{x^2-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x-1 < 0, \quad K_C = (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$

D)  $\frac{x(x-1)}{x} < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x-1 < 0, \quad K_D = (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

E)  $\frac{x-1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x-1 < 0, \quad K_E = (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

16 Je dáno číslo:

$$a = \frac{81^{121} - 3^{481}}{27^{60} \cdot 9^{10}}$$

**Které tvrzení je pravdivé?**

- A) Číslo  $a$  není celé číslo.
- B) Číslo  $a$  je liché.
- C) Číslo  $a$  je násobkem třinácti.
- D) Číslo  $a$  je větší než  $81^{71}$ .
- E) Číslo  $a$  je možné zapsat ve tvaru  $3^k$ , kde  $k \in \mathbf{N}$ .

**Řešení:**

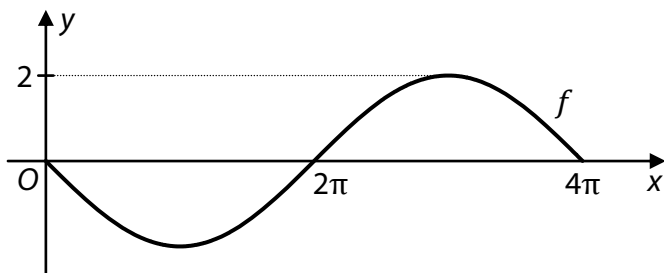
Upravíme číselný výraz  $a$  a ověříme pravdivost jednotlivých tvrzení (A–E).

$$a = \frac{81^{121} - 3^{481}}{27^{60} \cdot 9^{10}} = \frac{(3^4)^{121} - 3^{481}}{(3^3)^{60} \cdot (3^2)^{10}} = \frac{3^{484} - 3^{481}}{3^{180} \cdot 3^{20}} = \frac{3^{481} \cdot (3^3 - 1)}{3^{200}} = 3^{281} \cdot 26$$

- A) Číslo  $a$  je součinem celých čísel, je tedy celé.  
Tvrzení A je nepravdivé.
- B) Číslo  $a = 2 \cdot (13 \cdot 3^{281})$  je násobkem dvou, je tedy sudé.  
Tvrzení B je nepravdivé.
- C) Číslo  $a = 13 \cdot (2 \cdot 3^{281})$  je násobkem třinácti.  
Tvrzení **C** je pravdivé.
- D)  $81^{71} = (3^4)^{71} = 3^{284} = 3^{281} \cdot 27 > 3^{281} \cdot 26 = a$   
Tvrzení D je nepravdivé.
- E) Číslo  $a$  je násobkem třinácti, nelze ho tedy zapsat jako přirozenou mocninu tří.  
Tvrzení E je nepravdivé.

## VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 17

Funkce  $f$  s proměnnou  $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$  má předpis ve tvaru  $y = a \cdot \sin(bx)$ , kde  $a, b \in \mathbf{R}$ .  
 Funkce  $f$  je určena následujícím grafem.



(CZVV)

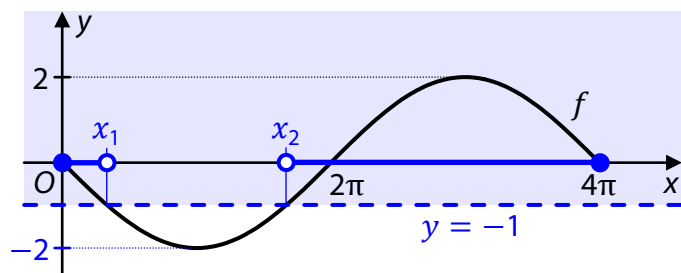
2 body

17 Která z množin je množinou všech  $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$ , pro něž platí  $f(x) > -1$ ?

- A)  $\langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{6}; 4\pi \rangle$   
 B)  $\langle 0; \frac{\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{3}; 4\pi \rangle$   
 C)  $\langle 0; \pi \rangle \cup \langle \pi; 4\pi \rangle$   
 D)  $\langle 0; \frac{7\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{11\pi}{3}; 4\pi \rangle$   
 E)  $\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \rangle$

**Řešení:**

Body grafu funkce  $f$  vyhovující podmínce  $f(x) > -1$  leží v polorovině  $y > -1$  s hraniční přímkou  $y = -1$ . Určíme souřadnice  $x_1, x_2$  průsečíků této přímky s grafem funkce  $f$ .



$$f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in \langle 0; x_1 \rangle \cup \langle x_2; 4\pi \rangle$$

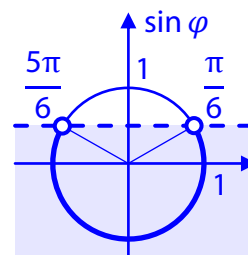
Funkce sinus nabývá hodnoty poloviny amplitudy v bodech, které leží v  $\frac{1}{6}$  a v  $\frac{5}{6}$  vzdálenosti mezi průsečíky se souřadnicovou osou  $x$ .

$$x_1 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{6} \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3}, \quad f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in \langle 0; \frac{\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{3}; 4\pi \rangle$$

**Jiný způsob řešení:**

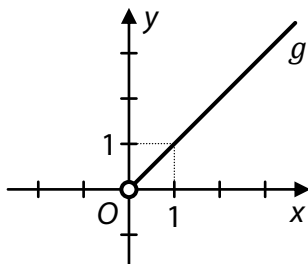
Z grafu určíme předpis funkce  $f: y = -2 \sin \frac{x}{2}$  a vyřešíme nerovnici pro funkční hodnoty:

$$\begin{aligned} f(x) > -1, \quad x \in \langle 0; 4\pi \rangle &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \langle 0; 2\pi \rangle \\ -2 \sin \frac{x}{2} > -1 \\ \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} \in \langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{6}; 2\pi \rangle &\Leftrightarrow x \in \langle 0; \frac{\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{3}; 4\pi \rangle \end{aligned}$$



## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Polopřímka bez počátečního bodu zakreslená v kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je grafem funkce  $g$ .



(CZVV)

2 body

18 Každá z pěti funkcí  $h_1-h_5$  je definována pro všechna  $x \in \mathbf{R}$ , pro která má smysl výraz na pravé straně jejího předpisu.

**Která z funkcí  $h_1-h_5$  má stejný graf jako funkce  $g$ ?**

A)  $h_1: y = \frac{\log_5 x^2}{\log_5 x}$

B)  $h_2: y = \frac{2x \cdot \log_5 x}{\log_5 x^2}$

C)  $h_3: y = 5^{\log_5 x}$

D)  $h_4: y = \log_5 5^x$

E)  $h_5: y = \frac{(\log_5 5^x)^2}{x}$

**Řešení:**

Graf funkce  $g$  je částí grafu lineární funkce  $y = x$ , tedy  $g: y = x, x \in (0; +\infty)$ .

Pro každou z funkcí  $h_1-h_5$  určíme nejprve definiční obor. Je-li roven definičnímu oboru funkce  $g$ , upravíme předpis funkce a ověříme, zda je ekvivalentní s předpisem funkce  $g$ .

$$D_{h_1} = (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$D_{h_2} = (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$D_{h_3} = (0; +\infty), \quad h_3: y = 5^{\log_5 x} = x$$

$$D_{h_4} = \mathbf{R}$$

$$D_{h_5} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

## VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 19

V balíčku je 12 karet očíslovaných přirozenými čísly od 1 do 12.  
(Každá karta obsahuje právě jedno číslo, žádné dvě karty nejsou očíslovány stejným číslem.)  
Balíček zamícháme a náhodně vytáhneme dvojici karet.

(CZVV)

**2 body**

**19 Jaká je pravděpodobnost, že součet obou čísel na tažených kartách je dělitelný šesti?**

A)  $\frac{1}{22}$

B)  $\frac{4}{33}$

C)  $\frac{3}{22}$

D)  $\frac{5}{33}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

**Řešení:**

Počet všech výsledků náhodného pokusu (tažení dvojice karet):  $\binom{12}{2} = 66$

Jev A: Součet obou čísel na tažených kartách je dělitelný šesti.

Výsledek příznivý jevu A nastane, bude-li součet obou (navzájem různých) čísel na tažených kartách 6, 12, nebo 18.

Vzhledem k nízkému počtu příznivých výsledků je můžeme pro konkrétní součty vypsat.

Možný součet	Vyhovující dvojice karet	Počet příznivých výsledků
6	{1; 5}, {2; 4}	2
12	{1; 11}, {2; 10}, {3; 9}, {4; 8}, {5; 7}	5
18	{6; 12}, {7; 11}, {8; 10}	3

Pravděpodobnost jevu A:  $\frac{2 + 5 + 3}{66} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$

**případně**

Čísla na tažených kartách jsou různá, menší z nich označíme  $a$ ,  $a \in \{1; 2; 3; \dots; 11\}$ .

Součet  $s$  čísel na tažených kartách může nabývat hodnot z množiny  $\{3; 4; 5; \dots; 23\}$ , tedy možné součty dělitelné šesti jsou 6, 12, nebo 18.

Požadovaného součtu  $s$  lze dosáhnout jen tehdy, bude-li  $a < \frac{s}{2}$ .

Větší z čísel je určeno jednoznačně jako  $s - a$ , přitom  $s - a \leq 12$  (číslo je na jedné z karet), tedy  $a \geq s - 12$  (podmínka má smysl pouze pro  $s > 12$ ).

Možný součet $s$	Podmínky pro $a$	Počet přípustných $a$ (tj. počet příznivých výsledků)
6	$a < 3$	2
12	$a < 6$	5
18	$6 \leq a < 9$	3

Každé dvě takto sestavené dvojice jsou různé.

$$\text{Pravděpodobnost jevu A: } \frac{2 + 5 + 3}{66} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$$

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Uvažujme dvě tělesa – **rotační válec** a **polokouli**.

Výška válce je o polovinu větší než poloměr  $r$  jeho podstavy.

Povrch polokoule (tedy včetně podstavy) je stejný jako povrch válce. Poloměr polokoule označme  $R$ .

(CZVV)

**2 body**

**20 Který vztah vyjadřuje závislost poloměrů  $R$  a  $r$ ?**

A)  $R = r$

B)  $R = \frac{5}{3} \cdot r$

C)  $R = \sqrt{3} \cdot r$

D)  $R = \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot r$

E)  $R = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot r$

**Řešení:**

Poloměr  $r$  podstavy válce i poloměr  $R$  polokoule jsou kladná reálná čísla.

Výšku válce označíme  $v$ , jeho povrch  $S$ . Povrch polokoule je rovněž  $S$ .

$$v = \frac{3}{2}r$$

$$\text{Povrch válce: } S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{3}{2}r = 5\pi r^2$$

$$\text{Povrch polokoule: } S = \pi R^2 + \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 3\pi R^2$$

Úpravou rovnosti povrchů obou těles získáme vztah pro poloměry:

$$3\pi R^2 = 5\pi r^2$$

$$R^2 = \frac{5}{3}r^2, \quad r, R \in \mathbf{R}^+$$

$$R = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot r = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot r$$

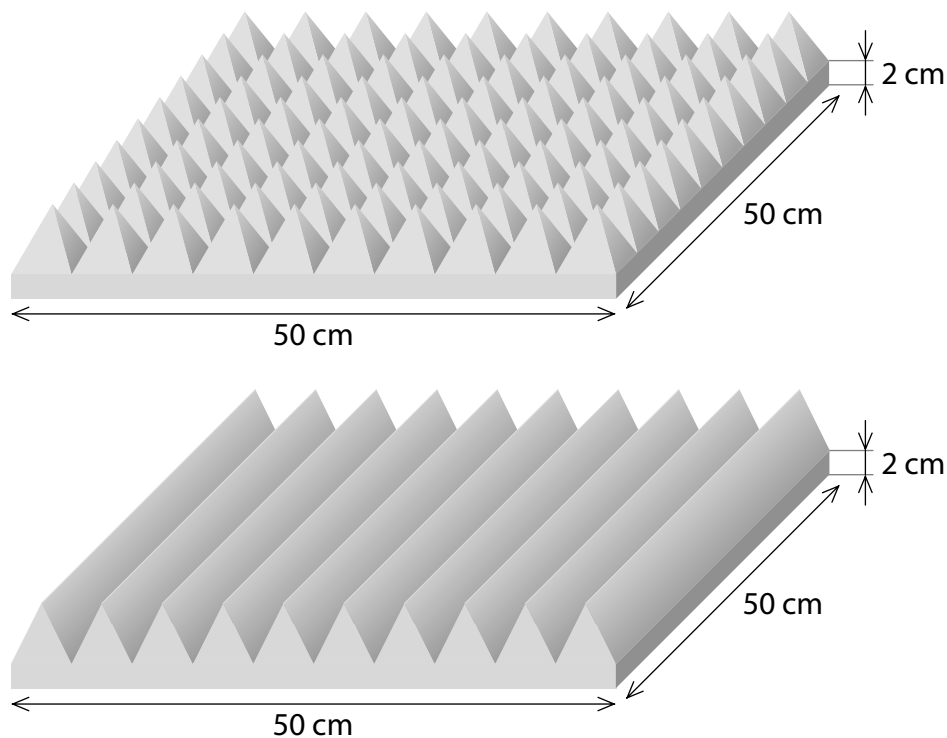
## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Profilované desky z akustické pěny se vyrábějí ve dvou provedeních.

Spodní část každé desky tvoří **platforma** tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky 50 cm a výškou 2 cm.

**V prvním** provedení horní podstavu platformy zcela pokrývá 100 shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů. V každém jehlanu je výška stejná jako délka podstavné hrany.

**Ve druhém** provedení horní podstavu platformy zcela pokrývá 10 shodných kolmých trojbokých hranolů. Podstava trojbokého hranolu má tvar rovnoramenného trojúhelníku, který přilehá k platformě svou základnou. Výška na základnu je stejná jako délka základny.



(CZVV)

2 body

21 Jaký je poměr objemů obou provedení akustických desek (větší objem ku menšímu)?

- A) 27 : 22
- B) 14 : 9
- C) 3 : 2
- D) 2 : 1
- E) jiný poměr

**Řešení:**

Délku podstavné hrany platformy označíme  $p$ , výšku platformy  $h$  a její objem  $V_p$ .

$$p = 50 \text{ cm}, \quad h = 2 \text{ cm}$$

$$V_p = p^2 h = 50^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 = 5\,000 \text{ cm}^3$$



**První provedení desky:**

Podél podstavné hrany platformy je v jedné řadě 10 shodných čtyřbokých jehlanů, každý má podstavnou hranu délky  $a$  a výšku  $v$ .

$$\text{Platí: } a = \frac{p}{10} = 5 \text{ cm}, \quad v = a$$

$$\text{Objem jednoho jehlanu: } V_j = \frac{1}{3} a^2 v = \frac{a^3}{3} = \frac{5^3 \text{ cm}^3}{3} = \frac{125}{3} \text{ cm}^3$$

První provedení desky obsahuje platformu a 100 shodných jehlanů o celkovém objemu:

$$V_p + 100V_j = 5\,000 \text{ cm}^3 + 100 \cdot \frac{125}{3} \text{ cm}^3 = \frac{27\,500}{3} \text{ cm}^3 = 9\,166,\overline{6} \text{ cm}^3$$

**Druhé provedení desky:**

Na platformě je položeno 10 shodných trojbokých hranolů s výškou  $p$ .

Podstavu každého hranolu tvoří rovnoramenný trojúhelník se základnou délky  $a$  a výškou na základnu o velikosti  $v_a$ .

$$\text{Platí: } a = \frac{p}{10} = 5 \text{ cm}, \quad v_a = a$$

$$\text{Objem jednoho hranolu: } V_h = \frac{1}{2} a v_a \cdot p = \frac{a^2 p}{2} = \frac{5^2 \cdot 50 \text{ cm}^3}{2} = 625 \text{ cm}^3$$

Druhé provedení desky obsahuje platformu a 10 shodných hranolů o celkovém objemu:

$$V_p + 10V_h = 5\,000 \text{ cm}^3 + 10 \cdot 625 \text{ cm}^3 = 11\,250 \text{ cm}^3$$

Požadovaný poměr objemů obou provedení akustických desek (většího ku menšímu):

$$\frac{V_p + 10V_h}{V_p + 100V_j} = \frac{11\,250 \text{ cm}^3}{9\,166,\overline{6} \text{ cm}^3} = \frac{27}{22}$$

**případně**

Při úpravě poměru objemů užitíme vztahu  $p = 10a$ :

$$\frac{V_p + 10V_h}{V_p + 100V_j} = \frac{p^2 h + 10 \cdot \frac{a^2 p}{2}}{p^2 h + 100 \cdot \frac{a^3}{3}} = \frac{100a^2 h + 10 \cdot \frac{a^2 \cdot 10a}{2}}{100a^2 h + 100 \cdot \frac{a^3}{3}} = \frac{h + \frac{a}{2}}{h + \frac{a}{3}} = \frac{6h + 3a}{6h + 2a} = \frac{12 + 15}{12 + 10} = \frac{27}{22}$$

## VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 22

Právě tři skupiny vězňů A, B, C vyráběly ochranné pláště pro zdravotníky. Každý vězeň téže skupiny ušil stejný počet plášťů.

Ve **skupině A** je  $p$  vězňů a **každý** z nich ušil  $(2p - 1)$  plášťů.

**Skupina B** má o  $p$  vězňů více než skupina A, ale **celkem** vyrobila o  $p$  plášťů méně než skupina A.

**Skupina C** má sice o 1 vězně méně než skupina A, každý její vězeň však ušil o 2 pláště více, než ušil každý vězeň skupiny A.

Skupina	A	B	C
Počet vězňů	$p$		
Počet plášťů, které ušil jeden vězeň	$2p - 1$		
Celkový počet vyrobených plášťů			

(CZVV)

max. 3 body

**22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).**

- |  | A                                   | N                                   |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 22.1 Ze všech vězňů, kteří šili pláště, je méně než polovina ve skupině B.         | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 22.2 Každý vězeň skupiny A ušil o $p$ plášťů více, než ušil každý vězeň skupiny B. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| 22.3 Skupina C celkem vyrobila více plášťů než skupina A.                          | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |

### Řešení:

Vyplníme tabulku podle zadání. Změny proti hodnotám skupiny A jsou vyznačeny červeně.

Skupina	A	B	C
Počet vězňů	$p$	$p + p = 2p$	$p - 1$
Počet plášťů, které ušil jeden vězeň	$2p - 1$	$(2p^2 - 2p) : 2p = p - 1$	$2p - 1 + 2 = 2p + 1$
Celkový počet vyrobených plášťů	$p \cdot (2p - 1) = 2p^2 - p$	$2p^2 - p - p = 2p^2 - 2p$	$(p - 1)(2p + 1) = 2p^2 - p - 1$

22.1 Počet všech vězňů:  $p + 2p + p - 1 = 4p - 1$

$$2p < \frac{4p - 1}{2} \Leftrightarrow 0 < -\frac{1}{2}$$

Nerovnost neplatí pro žádné  $p$ .

Tvrzení 22.1 je **nepravdivé**.

22.2  $2p - 1 = p - 1 + p$

Tvrzení 22.2 je **pravdivé**.

22.3  $2p^2 - p - 1 > 2p^2 - p \Leftrightarrow -1 > 0$

Nerovnost neplatí pro žádné  $p$ .

Tvrzení 22.3 je **nepravdivé**.