

# MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD21C0T04

## DIDAKTICKÝ TEST

**Maximální bodové hodnocení: 50 bodů**  
**Hranice úspěšnosti: 33 %**

### 1 Základní informace k zadání zkoušky

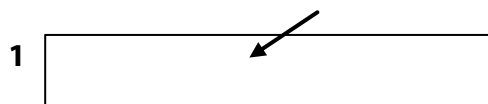
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

### 2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** písíci propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

### 2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

- Výsledky **píšete čitelně** do vyznačených bílých polí.



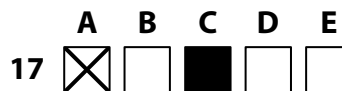
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

### 2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědi a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

**TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYNI!**

1 Pro  $a \in \mathbf{N}$  upravte výraz:

$$\frac{\sqrt{5a} + 5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{125} - 5\sqrt{a}}{5}$$

---

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Aleš si naspořil o 60 % vyšší částku než Dana a ze své naspořené částky již 45 % utratil. Když si Dana za část svých úspor koupila nové kolo, z úspor jí zbyla úplně stejná částka, jako zbyla Alešovi.

(CZVV)

**max. 2 body**

2 **Vypočtete,**

- 2.1 kolik procent svých úspor utratila Dana za kolo,
- 2.2 kolikrát více utratil Aleš než Dana.

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Karel a Emil mají pokosit louku.

Karel by pokosil celou louku sám za  $t$  hodin. Emil, který používá elektrickou kosu, by sám pokosil celou louku dvakrát rychleji než Karel.

Louku začal kosit Karel, po půl hodině se k němu přidal Emil a oba společně pak pracovali ještě několik hodin, než byla louka pokosená.

(Karel ani Emil své pracovní tempo nemění.)

(CZVV)

**max. 2 body**

**3 Vyjádřete v závislosti na veličině  $t$ ,**

3.1 jakou část louky pokosil Karel za půl hodiny,

3.2 jakou část louky pokosil Emil.

#### VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 4

Všech **90 žáků** čtvrtého ročníku dostalo známku ze závěrečného testu.

V tabulce jsou uvedeny pouze četnosti známek 1 a 4.

Dále platí: Žádné dvě četnosti nejsou stejné, medián známek je 2 a modus známek je 3.

|         |   |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|---|
| Známka  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Četnost | 5 |   |   | 2 |   |

(CZVV)

**2 body**

**4 Určete, kolik žáků dostalo ze závěrečného testu trojku.**

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Šestimístné číslo splňuje obě následující podmínky:

- Obsahuje všech šest číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Lze ho rozdělit na tři dvojčíslí, která mají stejný ciferný součet.

(Např. číslo 254 316 lze rozdělit na dvojčíslí 25, 43 a 16.)

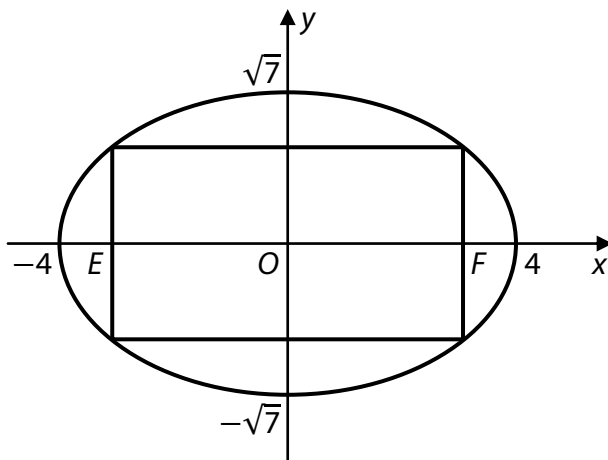
(CZVV)

**5** Vypočtete, kolik různých čísel splňuje uvedené podmínky.

**1 bod**

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Elipsa má střed v počátku kartézské soustavy souřadnic  $Oxy$  a poloosy  $a = 4$ ,  $b = \sqrt{7}$ .  
Do elipsy je vepsán obdélník, jehož svislé strany procházejí ohnisky  $E, F$  elipsy.



(CZVV)

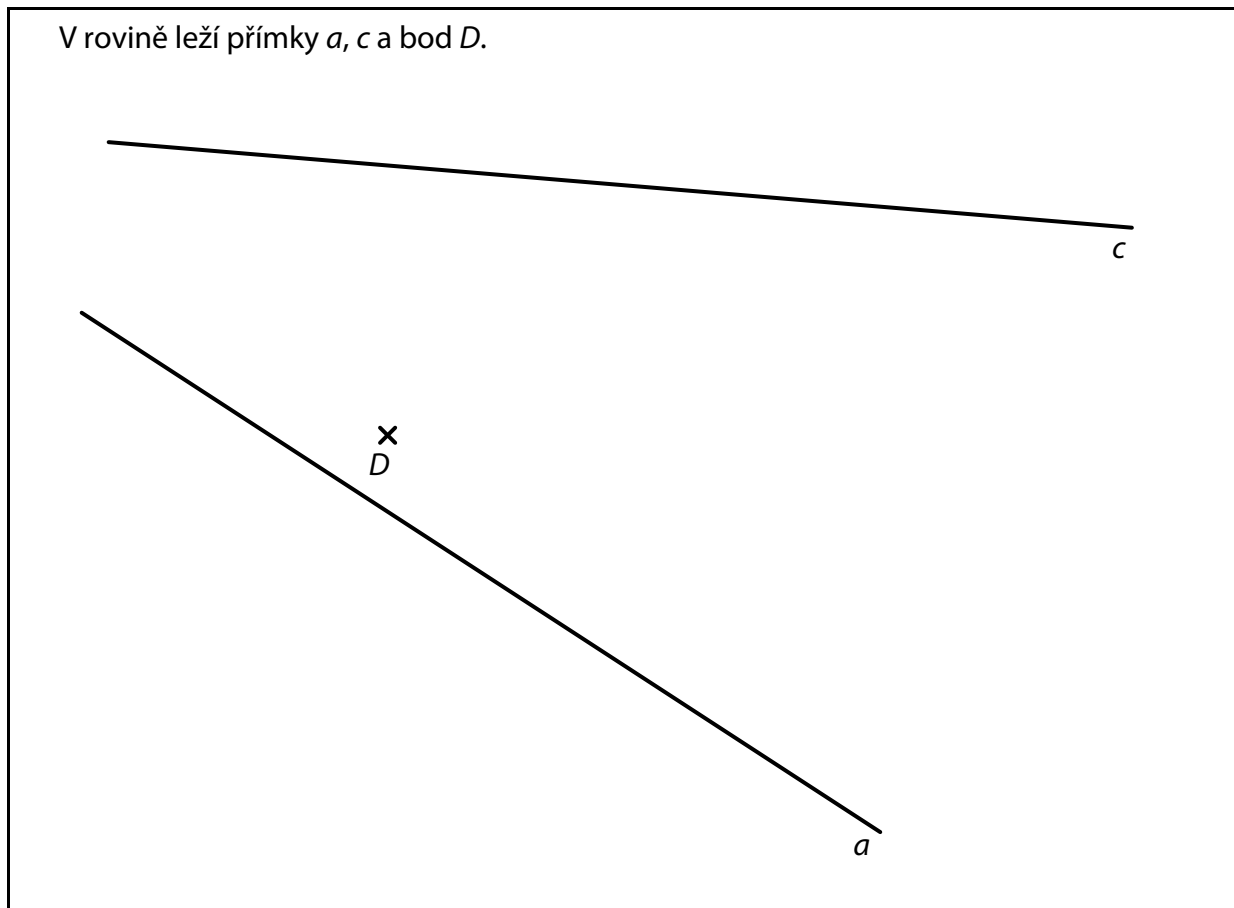
max. 2 body

**6** Vypočtěte obsah vepsaného obdélníku.

**V záznamovém archu** uveďte celý postup řešení.

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V rovině leží přímky  $a$ ,  $c$  a bod  $D$ .



(CZVV)

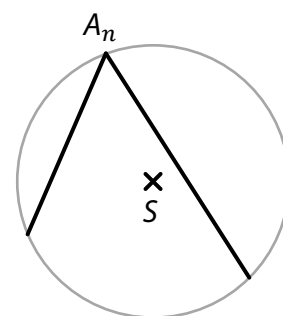
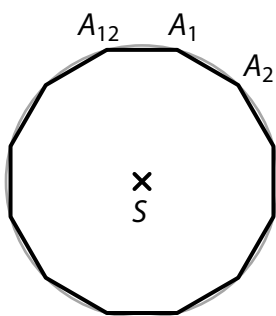
**max. 3 body**

- 7** Bod  $D$  je vrchol pravoúhlého lichoběžníku  $ABCD$  se základnami  $AB$ ,  $CD$  a pravým úhlem při vrcholu  $D$ .  
Vrchol  $A$  leží na přímce  $a$ , zbývající vrcholy  $B$ ,  $C$  na přímce  $c$ .  
Sousední strany  $CD$  a  $DA$  mají stejnou délku.
- 7.1 Hledáme vrcholy  $A$ ,  $B$ ,  $C$  lichoběžníku  $ABCD$ .  
Provedte náčrtek lichoběžníku  $ABCD$  a запиšte rozbor nebo postup konstrukce.
- 7.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy lichoběžníku  $ABCD$  a lichoběžník narýsujte.  
Najděte všechna řešení.

**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 8–9

Pro  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 3$  je dán pravidelný  $n$ -úhelník  $A_1A_2 \dots A_n$ , kterému je opsána kružnice se středem  $S$ .



(CZVV)

1 bod

8 Pro  $n = 12$  určete velikost obvodového úhlu  $A_3A_{12}A_8$ .

max. 4 body

9 Existuje přirozené číslo  $k < n$  takové, že pro  $k \neq 20$  má obvodový úhel  $A_kA_nA_{20}$  velikost  $56^\circ$ .

9.1 **Vypočtěte nejmenší možné číslo  $n$**  splňující uvedené podmínky.

9.2 Pro nejmenší možné  $n$  **vypočtěte  $k$** .  
Najděte obě řešení.

**V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.



**max. 3 body**

**10** Je dána rovnice, jejíž levou stranu tvoří nekonečná geometrická řada.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{9}{(x-1)^3} - \frac{27}{(x-1)^4} + \dots = \frac{8-x}{16}$$

10.1 Určete množinu všech  $x \in \mathbf{R}$ , pro která je řada na levé straně rovnice konvergentní.

10.2 Řešte rovnici v oboru  $\mathbf{R}$ .

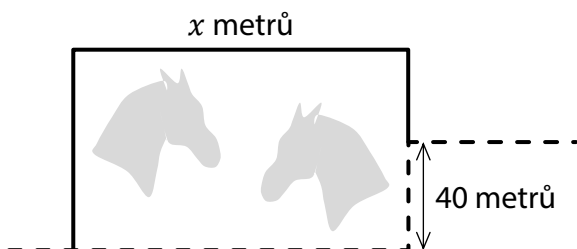
**V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Výběh pro koně bude mít tvar pravoúhelníku, jehož strana měří  $x$  metrů.

K ohrazení části výběhu využijeme z již hotových hrází sousedních pozemků (v obrázku jsou vyznačena čárkovanou čarou) úsek dlouhý  $(x + 40)$  metrů.

Zbytek hranice výběhu bude tvořit plot v celkové délce 200 metrů.



(CZVV)

**max. 4 body**

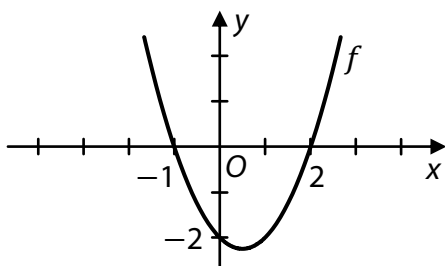
### 11

- 11.1 Pro  $x \in (0; 160)$  vyjádřete v  $\text{m}^2$  rozlohu výběhu  $S$  v závislosti na veličině  $x$ .
- 11.2 Určete všechny hodnoty  $x$ , pro které bude mít výběh rozlohu **alespoň**  $7\,000 \text{ m}^2$ .
- 11.3 Vypočítejte **největší** možnou rozlohu výběhu.

**V záznamovém archu** uveďte ve všech částech úlohy celý **postup řešení**.

## VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 12

Kvadratická funkce  $y = f(x)$  s definičním oborem  $\mathbf{R}$  je dána grafem.



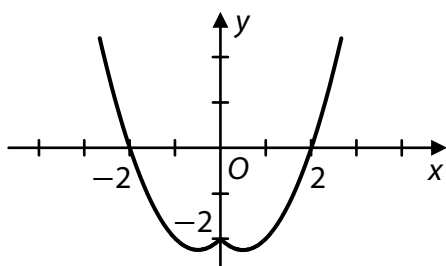
(CZVV)

**max. 3 body**

**12** Všechny funkce dané následujícími grafy (12.1–12.3) mají definiční obor  $\mathbf{R}$ .

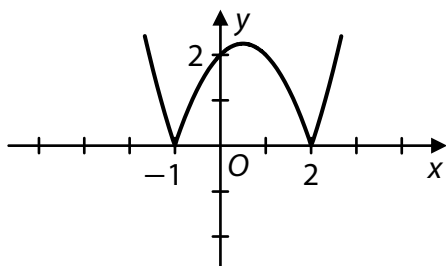
**Přiřadte ke každému grafu (12.1–12.3) odpovídající předpis funkce (A–F).**

12.1



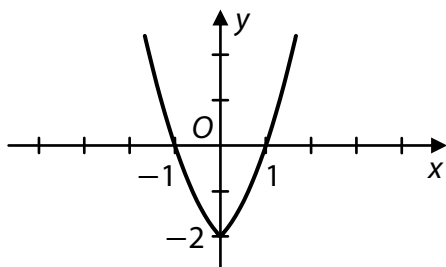
\_\_\_\_\_

12.2



\_\_\_\_\_

12.3



\_\_\_\_\_

- A)  $y = -f(|x|)$
- B)  $y = f(-|x|)$
- C)  $y = f(|-x|)$
- D)  $y = -|f(x)|$
- E)  $y = |-f(x)|$
- F)  $y = |f(-x)|$

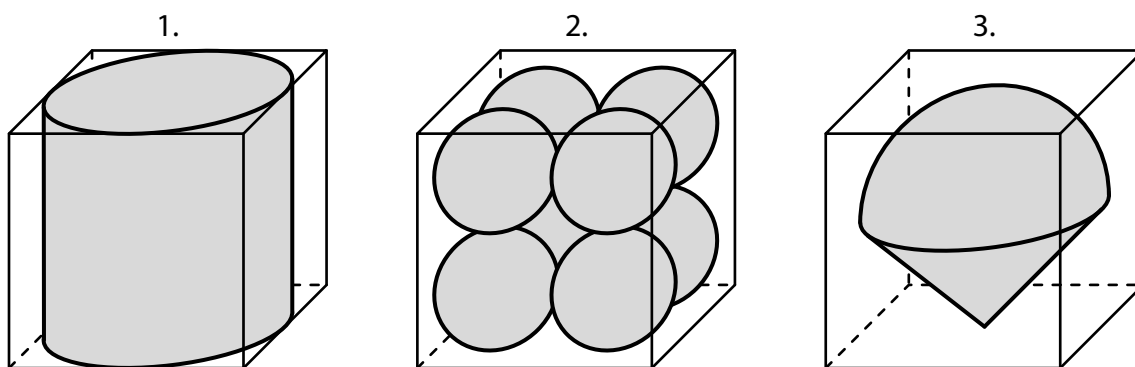
### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Jsou dány 3 shodné krychle o hraně délky  $a$ .

Do 1. krychle vepíšeme rotační válec, jehož podstavy leží v protějších stěnách krychle.

Do 2. krychle vepíšeme 8 shodných koulí tak, aby se každá z nich dotýkala tří stěn krychle a tří koulí.

Do 3. krychle vepíšeme těleso složené z rotačního kužele a polokoule. Kužel a polokoule mají společnou podstavu, jejíž poloměr je shodný s výškou kužele. Vrchol kužele leží ve středu jedné stěny krychle. (Složené těleso se dotýká každé stěny krychle.)



(CZVV)

max. 3 body

**13** Přiřadte ke každé otázce (13.1–13.3) správnou odpověď (A–F).

13.1 Jaký je objem rotačního válce v 1. krychli? \_\_\_\_\_

13.2 Jaký je celkový objem 8 koulí v 2. krychli? \_\_\_\_\_

13.3 Jaký je objem složeného tělesa ve 3. krychli? \_\_\_\_\_

A)  $\frac{\pi}{2}a^3$

B)  $\frac{\pi}{3}a^3$

C)  $\frac{\pi}{4}a^3$

D)  $\frac{\pi}{6}a^3$

E)  $\frac{\pi}{8}a^3$

F) jiný objem

2 body

- 14 Těleso vznikne rotací pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku kolem odvěsny délky 3 cm.

**Jaký je povrch tohoto tělesa?**

- A)  $9\pi \cdot (1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$
- B)  $9\pi \cdot (1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$
- C)  $18\pi \text{ cm}^2$
- D)  $6\pi \text{ cm}^2$
- E) jiný povrch

---

2 body

- 15 Je dán výraz s proměnnou  $x \in \mathbf{R}$  a reálným číslem  $m$ :

$$\frac{(x + m + 3)(x - 2m)}{x^2 - 4m^2}$$

**Pro která čísla  $m$  má výraz právě jeden nulový bod?**

- A) pouze pro  $m = 3$
- B) pouze pro  $m = -1$
- C) pro všechna  $m \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$
- D) pro všechna  $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 3\}$
- E) pro žádné reálné číslo  $m$

2 body

16 Je dána posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , kde  $a_n = n^2 - n + 17$ .

**Které tvrzení je nepravdivé?**

- A) Prvních 20 členů dané posloupnosti jsou prvočísla.
- B) Daná posloupnost je rostoucí.
- C) Pro danou posloupnost platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .
- D) Každý člen dané posloupnosti je liché číslo.
- E) V dané posloupnosti pro každé  $n \in \mathbf{N}$  platí  $a_{n+1} = a_n + 2n$ .

---

2 body

17 Jsou dány dvě **totožné** přímky  $p, q$ :

$$p: \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

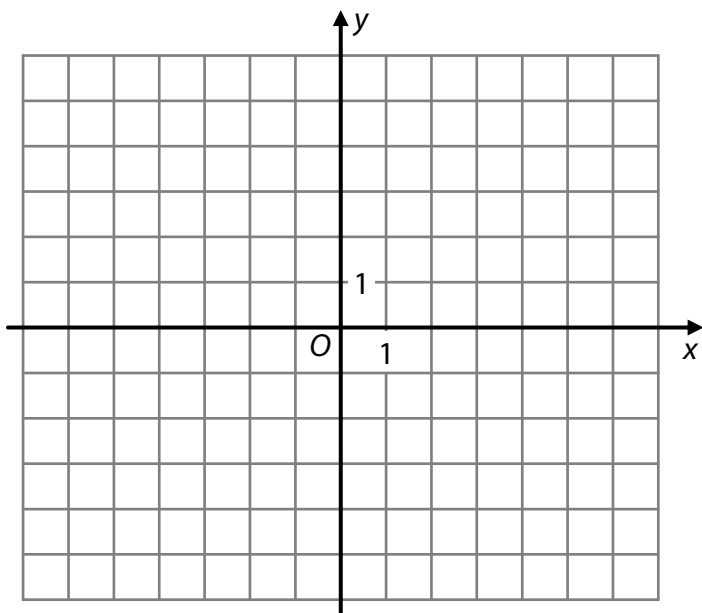
$$q: 6x + by + c = 0; \quad b, c \in \mathbf{R}$$

**Jaká je hodnota parametru  $c$ ?**

- A)  $c = 24$
- B)  $c = 12$
- C)  $c = 4$
- D)  $c = 0$
- E)  $c = -12$

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je dán bod  $C[1; 1]$  a přímka  $p: x - y - 4 = 0$ .  
Na přímce  $p$  leží dva různé body  $A, B$ , které mají od bodu  $C$  vzdálenost 6 jednotek.



(CZVV)

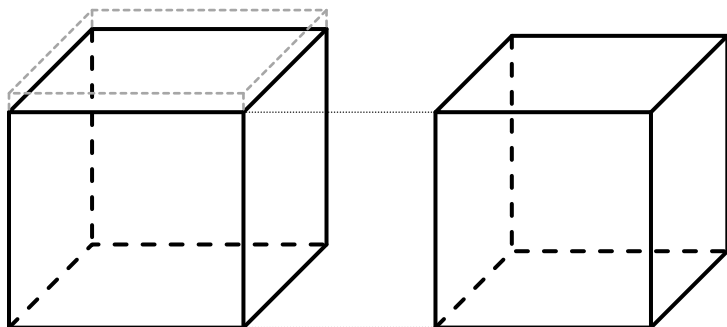
**2 body**

**18** Jaké jsou souřadnice středu úsečky  $AB$ ?

- A)  $[-2; 2]$
- B)  $[-1; 3]$
- C)  $[2; -2]$
- D)  $[3; -1]$
- E) jiné souřadnice

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Hugo stavěl ze stejných krychliček velkou krychli, ale k dokončení mu chyběla celá poslední vrstva krychliček. Když z této nedokončené krychle 105 krychliček odebral, vznikla menší krychle, která byla o jednu vrstvu krychliček nižší, než měla být velká krychle.



(CZVV)

**2 body**

**19 Kolik krychliček měl Hugo?**

- A) méně než 576
- B) 576
- C) 617
- D) 648
- E) více než 648



## VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Jedna osmina všech osob si koupila po třech losích, jedna čtvrtina osob po dvou losích a zbytek po jednom losu. Ze všech losů zakoupených těmito osobami vyhraje jediný.

(CZVV)

**2 body**

**20** Jaká je pravděpodobnost, že vítězný los bude patřit některé osobě, která si koupila alespoň 2 losy?

A)  $\frac{3}{8}$

B)  $\frac{7}{12}$

C)  $\frac{3}{4}$

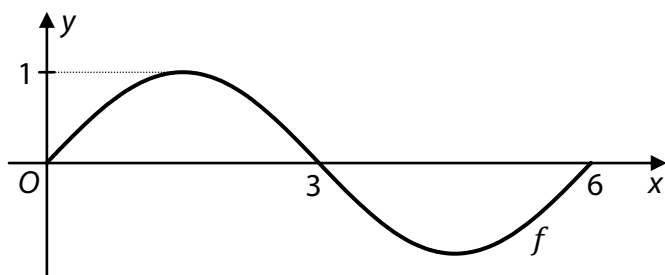
D)  $\frac{7}{8}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Funkce  $f$  s proměnnou  $x \in \mathbf{R}$  má předpis ve tvaru  $f: y = \sin ax$ , kde  $a \in \mathbf{R}$ .

Funkce  $f$  je určena následujícím grafem.



(CZVV)

2 body

21 Jaký je předpis funkce  $f$ ?

A)  $f: y = \sin x$

B)  $f: y = \sin \frac{x}{3}$

C)  $f: y = \sin \frac{x}{3\pi}$

D)  $f: y = \sin \frac{3x}{\pi}$

E)  $f: y = \sin \frac{\pi x}{3}$

max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pro každé  $x \in \mathbf{R}$  pravdivé (A), či nikoli (N).

22.1

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 2$$

A N

22.2

$$\frac{x^2 + x}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2x$$

22.3

$$(x + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x + 1 = 3$$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.